Независимый Московский Университет

Московский Центр непрерывного математического образования

Высший Колледж Математики

А. А. Белавин, А. Г. Кулаков

Лекции по теоретической физике

МЦНМО, ВКМ НМУ 1999

Александр Абрамович Белавин,
Александр Георгиевич Кулаков

А. А. Белавин, А. Г. Кулаков
Лекции по теоретической физике. — М: МЦНМО, ВКМ НМУ. — 184 с.

Книга подготовлена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 92 – 02 – 16507 и № 98 – 01 – 00555).

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования

Верстка В. В. Кондратьев
Рисунки (с использованием системы METAPOST) В. В. Кондратьев

Лицензия ЛР №071150 от 11.04.95 г
Подписано в печать 01.03.99 г. Тираж 100 экз.

МЦНМО
121019, Москва, Б. Власьевский пер., 11. Тел. 241 – 05 – 00

5 семестр

Введение

[Лекция 1]

Физика и математика

Эйнштейн: «Физика основывает свои понятия на измерениях, причем представления и утверждения физики могут быть выражены математически.»

«Физика стремится найти объединение всех областей на теоретической основе, образованной минимальным числом понятий и фундаментальных соотношений, из которых логически можно вывести все.»

«Глубокое убеждение в достижимости этой цели является главным источником страстной преданности, которая всегда воодушевляет исследователя.»

Физика находит в математике язык и прообразы, математика в физике — смутные очертания понятий и аксиом, а также проблемы.

В следующей таблице показаны разделы физики и математики, оказавшие существенное влияние друг на друга.

Физика	**Математика**
Измерения Земли, астрономия	Геометрия Евклида
Небесная механика Кеплера, Ньютона	Анализ
Гидродинамика, электродинамика	Дифференциальные уравнения
Общая теория относительности	Дифференциальная геометрия
Квантовая механика	Гильбертово пространство, теория представлений групп
Калибровочные теории, инстантоны	Геометрия расслоенных пространств
Теория струн. Конформная теория поля	Бесконечномерные алгебры Ли

Существуют 3 вида физики: экспериментальная — с этой части физики собственно началась физика, без нее она не может

существовать, и это понятно всем; теоретическая физика — та ее часть, в которой возникают основные понятия и язык, строятся модели и постулируются уравнения, описывающие реальный мир; и математическая физика, в которой эти уравнения решаются. Одна из основных задач этого курса — показать, какими принципами руководствуются физики, придумывая уравнения, описывающие наш мир. Курс рассчитан на 2 года или 4 семестра. Вот примерный план курса:

5 семестр — классическая теория поля (специальная теория относительности, электродинамика, общая теория относительности);

6 семестр — квантовая механика;

7 семестр — модель Изинга, точнорешаемые модели квантовой теории поля.

8 семестр — квантовая теория поля, конформная теория поля.

В этом семестре изучаются структура пространства-времени, калибровочные поля, уравнения Максвелла, гравитация.

Евклидова структура пространства

Когда мы в геометрии употребляем слова точка, прямая, плоскость, их содержание не существенно, аксиомы служат им определением, а математически существенно отсутствие противоречий в определениях и аксиомах.

Когда мы употребляем эти слова в физике, мы должны указать способ их измерения и наблюдения (прямо или косвенно). Это простое замечание не всегда учитывалось. Ярчайший пример — понятие абсолютного времени, существовавшее до Эйнштейна и лишенное физического содержания.

Специальная теория относительности

Утверждение о евклидовости пространства бессмысленно, пока не указаны физические объекты, соответствующие точкам, прямым и т. д.

Движение в механике — это изменение *положения* тела. Под положением понимается *относительное положение*, положение относительно других тел. Понятие абсолютного положения, положения в *абсолютном пространстве* лишено физического содержания.

Тело или система тел, относительно которых определяется положение, — это пространственная система отсчета.

Утверждение о том, что два неодновременных события произошли в одном месте, лишено физического содержания. Представьте, например, что вы едете в поезде. То, что происходит в одном месте для вас, происходит в разных местах для наблюдателя на станции.

В качестве пространственной системы отсчета можно взять твердое тело, в качестве координатных осей — твердые стержни, про которые, как мы предполагаем, *верны утверждения евклидовой трехмерной геометрии.* Их надо проверять. Например, Гаусс проверил равенство суммы углов треугольника 180° для трех горных вершин на расстоянии ≈ 100 км. Расчет движения планет и спутников дает лучшую точность. При этом евклидовость геометрии пространства является лишь частью предположений, роль прямых в ней играют лучи света, а не стержни.

Так же можно проверять, что длина твердого стержня не зависит от пути переноса.

Можно брать разные системы координат. Переходы от одной ортогональной системы координат к другой образуют группу движений трехмерного евклидова пространства, состоящую из вращений и сдвигов.

В качестве простейших можно взять вращения (XY), (YZ), (ZX) и сдвиги ($x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$).

Длина твердого стержня не меняется при движениях. Другими словами,

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

является инвариантом. Это свойство — результат соглашения и экспериментальной проверки.

Итак, *пространство изотропно и однородно* или *пространство евклидово.*

Время

Время измеряется *часами.* Часы — это тело (система тел), совершающее периодический процесс. Примеры: маятник, вращение Земли, колебание электромагнитного поля.

Колебания часов, выбранных в качестве эталона, считаются равномерными по определению.

Пространственно-временная система отсчета

Если в каком-то месте есть часы, мы можем определять моменты, в которые в этом месте происходят события.

Если события происходят в разных местах, то надо определить, что значит, что они одновременны.

Эйнштейн предложил следующий способ определения синхронности часов. Часы в точках A и B назовем синхронными, если лучи света, одновременно вышедшие из середины отрезка AB в направлении точек A и B, достигают этих точек при одинаковых показаниях часов. Нужно проверять, что понятие синхронных часов по Эйнштейну транзитивно, т. е. если часы в точках A и B синхронны и часы в точках B и C синхронны, то и часы в точках A и C синхронны. Совокупность физических опытов является такой проверкой.

Принцип относительности Галилея

Инерциальной системой отсчета называется система, в которой график движения свободной материальной точки — прямая.

Инерциальные системы существуют. И их много. Это экспериментальный факт. Если система движется относительно некоторой инерциальной системы отсчета равномерно и прямолинейно, то она также является инерциальной (т. е. положение движущейся системы в каждый момент времени получается из предшествующего сдвигом, причем равным промежуткам времени отвечают равные сдвиги). Это утверждение называется *законом инерции.*

Если у системы тел в некоторый момент заданы положения и скорости, то они однозначно определяют их положения и скорости в будущем. Этот принцип называется *принципом причинности.*

Если совершить преобразование начальных условий (сдвиг в пространстве, вращение, сдвиг времени), то движение совершается по траектории, полученной тем же преобразованием. Эти утверждения, подтвержденные экспериментально, называются *однородностью пространства*, *изотропией пространства*, и *однородностью времени*, соответственно.

Ньютон предполагал (и это экспериментально подтверждается с некоторой точностью), что при переходе от одной инерциальной системы к другой не меняются масштаб и время. Например, если система движется в направлении оси x со скоростью v, то координаты преобразуются по следующему правилу: $x' = x + vt$, $t' = t$.

Такие преобразования образуют *группу Галилея.* Уравнение $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ — инвариант этой группы.

Следствие. Если система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью $\vec{V}$, а в системе отсчета K скорость тела равна $\vec{v}$, то скорость тела в системе K' равна $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{V}$.

Свет

Свет имеет конечную скорость, волновые свойства и электромагнитную природу. Так как свет имеет волновые свойства, возникло предположение, что это колебание некоторой среды — эфира — подобно волнам на воде. Это означало, что существует выделенная система координат, в которой эфир неподвижен. С целью обнаружить скорость Земли относительно эфира был произведен опыт Майкельсона. Его результат: скорость относительно эфира равна 0. Возникло предположение, что эфир увлекается Землей. Но это предположение опровергается опытом Физо и аберрацией при наблюдении звезд. Итак, эфира не существует.

Отрицательный результат опыта Майкельсона можно объяснить также гипотезой *истечения Ритца* о том, что свет имеет постоянную скорость относительно источника излучения, а не относительно наблюдателя. Но эта гипотеза опровергается наблюдением двойных звезд.

Опыт Кеннеди и Горнадийка прямо проверяет одинаковость скоростей света в разных система отсчета. В этом опыте в интерферометре Майкельсона различная длина плеч инструмента приводит к интерференции, и экспериментатор может наблюдать, смещаются ли интерференционные полосы в течение долгого времени — когда Земля реализует разные системы отсчета.

Два принципа могут объяснить все эти факты.

A) Принцип относительности (включая одинаковость скорости света относительно неподвижного источника в разных инерциальных системах).

B) Независимость скорости света от движения источника в одной инерциальной системе отсчета.

Вместе эти принципы противоречат ньютонову понятию *одновременности* (априорному, метафизическому) и предположению о неизменности масштабов времени и расстояния при переходе в движущуюся систему отсчета. Тем самым они противоречат преобразованиям Галилея, а именно, утверждению

$$t' = t \quad \text{и} \quad \Delta x' = \Delta x \quad \text{для} \quad t_1 = t_2.$$

Значит, преобразования Галилея надо изменить.

Попробуем найти преобразования координат при переходе в систему отсчета, движущуюся относительно данной со скоростью V по оси x, $x' = x'(x,t)$ и $t' = t'(x,t)$, которые удовлетворяют следующим требованиям:

(1) прямые (график движения свободной частицы) переходят в прямые. Это принцип относительности.

(2) Световой конус (график движения света) переходит в себя. Это принцип относительности + принцип независимости скорости света от движения источника.

(3) Преобразование со скоростью $-V$ является обратным к преобразованию со скоростью V.

(4) Композиция преобразования со скоростью $-V$ и отражения — преобразование со скоростью V.

Из (1) и того факта, что бесконечные точки переходят в бесконечные, следует линейность.

Вместо (1) можно потребовать однородность пространства и времени, что означает, что промежутку времени Δt в системе K соответствует определенный промежуток $\Delta t'$ в системе K' и сдвиг $\Delta x'$ не зависит от x и t.

Выведем такое преобразование в случае одной пространственной координаты x.

В силу линейности

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = A(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

Следствием этих формул является принцип относительности: равномерное движение в системе K остается таковым и в системе K'. Это не удивительно, ибо мы уже требовали выполнения этого принципа, когда сказали, что одинаковые промежутки времени и одинаковые масштабы в разные моменты времени и разных точках пространства в системе K остаются таковыми и в системе K'.

Если потребовать, чтобы световой конус переходил в себя (т. е. $(ct)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (ct')^2 - (x')^2 = 0$), то с учетом линейности получим

$$(ct')^2 - (x')^2 = \lambda(v)[(ct)^2 - x^2],$$

кроме того, $\lambda(v)\lambda(-v) = 1$. Сделав отражение $x \to -x$, $v \to -v$, получаем $\lambda(v) = \lambda(-v)$, следовательно, $\lambda(v) = 1$. Из этого следует, что преобразование координат имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x' = \operatorname{ch}\alpha \cdot x + \operatorname{sh}\alpha \cdot ct, \\ t' = \dfrac{\operatorname{sh}\alpha}{c} \cdot x + \operatorname{ch}\alpha \cdot t. \end{cases}$$

Задача. Проделайте эти вычисления.

Подставим $x = 0$:

$$x' = \operatorname{th}\alpha \cdot ct' = vt'.$$

Поэтому $\operatorname{th}\alpha = v/c$. Итак,

$$x' = \frac{x + v_1 t}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}; \quad t' = \frac{t + v_1 x/c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}.$$

Или наоборот:

$$x = \frac{x' - v_1 t'}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}; \quad t = \frac{t' - v_1 x'/c^2}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}.$$

Найдем скорость движения системы K'' относительно K, если K'' движется относительно K' со скоростью v_2, проверив заодно групповой закон:

$$x'' = \frac{x' + v_2 t'}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}; \quad t'' = \frac{t' + v_2 x'/c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}$$

$$x'' = \frac{x + (v_2 + v_1)t + v_2 v_1 x/c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}.$$

Это значит, что

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}.$$

Итак, преобразования координат при переходе из одной системы отсчета в другую образуют группу — группу Лоренца.

Принцип относительности Эйнштейна утверждает, что законы природы инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Задача. Докажите, что при $\dfrac{v}{c} \ll 1$ преобразования Лоренца совпадают с преобразованиями Галилея с точностью до $o(v/c)$ (бесконечно малых порядка $(v/c)^2$).

[Лекция 2]

Преобразование масштабов и замедление часов

Сокращение масштаба. Пусть неподвижный стержень длины L, координаты концов которого $x_1 = 0$ и $x_2 = L$, покоится в системе K, движущейся со скоростью v относительно системы K'. Найдем координаты x'_1 и x'_2 его концов в системе K' в момент времени t'. Последняя фраза, по существу, является определением: длина стержня в системе K' — это разность координат его концов в некоторый единый момент времени. Это означает, что события измерений координат концов стержня в системе K' являются одновременными. Но эти события в системе K уже не одновременны (см. рис. 1).

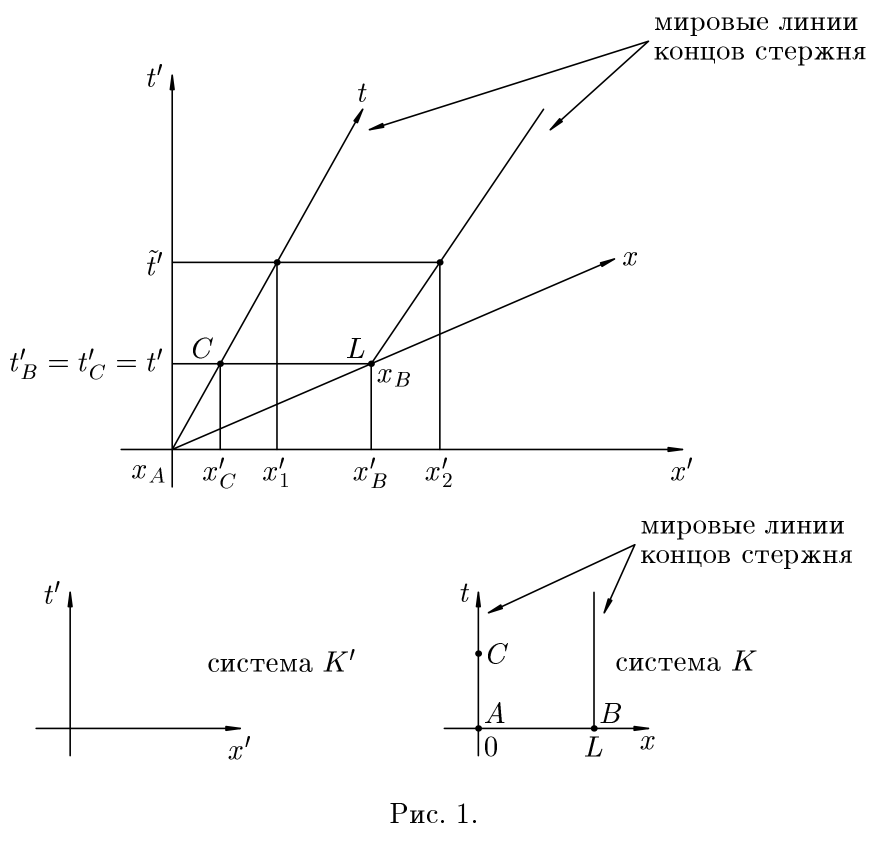


Рис. 1.

Обозначим через A и B события с координатами $(x_A, t_A) = (0, 0)$ и $(x_B, t_B) = (L, 0)$ в системе K, а через C — событие, задаваемое положением начала стержня в системе K' в момент времени $t'_C = t'_B = t'$. Из формул предыдущей лекции получаем:

$$x'_B = \frac{x_B + vt_B}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

$$t'_B = \frac{t_B + vx_B/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{vL/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = t'_C = t';$$

$$t'_C = \frac{t_C + vx_C/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad t_C = t'_C\sqrt{1 - v^2/c^2} = vL/c^2.$$

Следовательно

$$x'_C = \frac{x_C + vt_C}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{Lv^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

и

$$L' = x'_2 - x'_1 = x'_B - x'_C = \\ = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{Lv^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = L\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Этот же результат можно получить и другим способом.

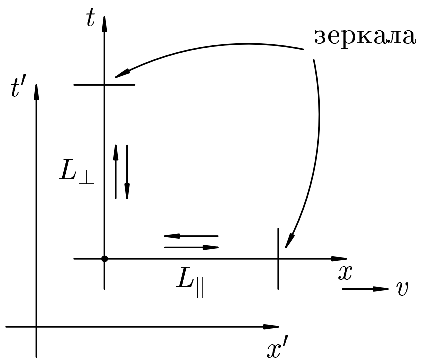


Рис. 2.

Рассмотрим эксперимент Майкельсона в системе отсчета K, движущейся параллельно одной из осей x' системы отсчета K'. В движущейся системе отсчета K свет, пущенный в двух перпендикулярных направлениях, возвращается одновременно, ибо расстояния одинаковы и равны $2L$ (см. рис. 2), $L_\perp = L_\| = L$. При наблюдении из неподвижной системы K'

$$\begin{cases} t'_1 c = L_\| + v t'_1 & \text{(свет бежит вправо)} \\ t'_2 c = L_\| - v t'_2 & \text{(свет бежит влево)} \end{cases}$$

время в перпендикулярном к движению направлении

$$t'_3 = \frac{2L_\perp}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Для движения в продольном направлении (см. рис. 3) $L_\perp^2 + v^2 {t'_3}^2 = c^2 {t'_3}^2$, $t'_3 = \dfrac{L_\perp}{\sqrt{c^2 - v^2}}$. Из равенства $2t'_3 = t'_1 + t'_2$ следует, что

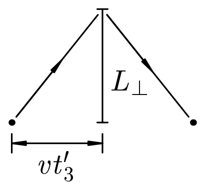


Рис. 3.

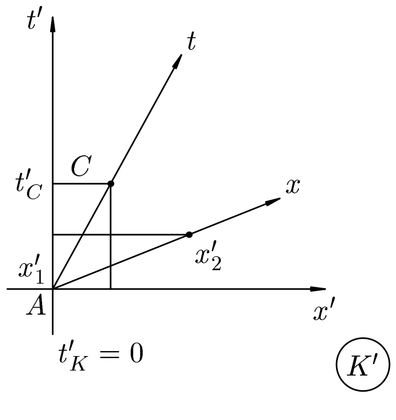
$L_\| = L_\perp \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$. Время в продольном направлении

$$t'_1 + t'_2 = \frac{L_\|}{c + v} + \frac{L_\|}{c - v}.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{L_\|}{L_\perp} = \dfrac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c}$. Но поперечный масштаб меняться не может, ибо это противоречит принципу относительности. Действительно, возьмем два одинаковых поперечных кольца, сближающихся со скоростью v. Если, например, движущееся кольцо сжимается, то оно должно пройти внутри покоящегося. А наблюдатель, связанный с ним, увидит, что другое кольцо пройдет внутри. Абсурд. Значит, $L_\perp = L$ и $L_\| = L\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Растяжение времени. Возьмем в движущейся системе K два события $(0, 0)$ и $(0, t_C = \tau)$ (см. рис. 4). Найдем t'_C и $\tau' = t'_C - t'_A$. (В пространстве (x, t) и (x', t') метрика не евклидова, поэтому некоторые «катеты» длиннее «гипотенузы»; x_1 и x_2 одновременны в K, но не одновременны в K'.) Получаем

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$



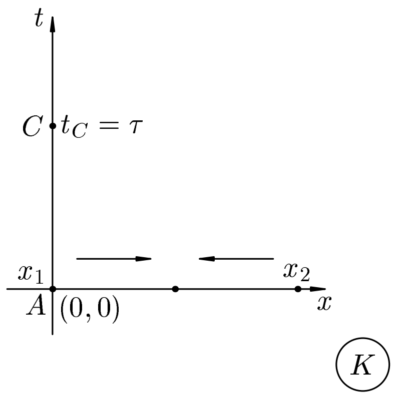


Рис. 4.

Удлинение времени поясняет мысленный эксперимент с часами Фейнмана. Часы образованы двумя параллельными зеркалами, между которыми перпендикулярно бегает луч света, который издает «тик», приходя к зеркалу. Пусть часы Фейнмана движутся со скоростью v параллельно зеркалам. Скорость света для покоящегося наблюдателя и движущегося вместе с часами одинакова, а расстояние для покоящегося наблюдателя в $\dfrac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}}$ раз больше. Во столько же раз замедляются движущиеся часы для неподвижного наблюдателя, ибо поперечная длина не меняется. Любые другие часы будут идти так же, иначе можно было бы внутри корабля измерить его скорость, что нарушает принцип относительности.

Нарушение одновременности. Пусть система отсчета K движется относительно системы K' со скоростью v. Пусть в точках X_1 и X_2 происходят одновременные события — приход сигналов, выпущенных из середины отрезка. Как отличаются времена этих событий в системе K' (см. рис. 4, *б*)?

$$ct'_1 + vt'_1 = \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}; \quad ct'_2 - vt'_2 = \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Отсюда

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(x_2 - x_1)v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Соберем теперь все эти факты вместе. Преобразование продольной координаты

$$x' = x \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} + vt'.$$

Эта формула означает, что начало координат системы K движется относительно K' со скоростью u, а масштаб сжат.

Преобразование времени

$$t' = \frac{vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Здесь первый член — сдвиг времени на движущихся часах, а второй — растяжение времени.

Подставляя t' из B в A, получаем:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ t' = \dfrac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{cases}$$

Преобразование скорости. Напишем формулы для дифференциалов координат.

$$dx' = \frac{dx + v\,dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad dy' = dy; \quad dz' = dz;$$
$$dt' = \frac{dt + v\,dx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Получаем:

$$v'_x = \frac{v_x + v}{1 + v_x v/c^2}; \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v_x v/c^2}; \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v_x v/c^2}.$$

Другой вывод формул преобразования скоростей был приведен вместе с выводом преобразований Лоренца.

Пространство Минковского

Положим $x_0 = ct$. *Пространство Минковского* — это псевдоевклидово пространство (x_0, x_1, x_2, x_3) с метрикой $l^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Расстояние между двумя точками в такой метрике называют *интервалом*. *Группа Лоренца* — это группа движений этого пространства. Точка этого пространства (мировая точка) — *событие*. *Мировая линия* — траектория частицы.

Интервалы на световом конусе ($l^2 = 0$) называют *световыми*, внутри конуса ($l^2 > 0$) — *времениподобными*, вне конуса ($l^2 < 0$) — *пространственноподобными*. Для любого времениподобного интервала можно выбрать инерциальную систему отсчета так, что эти события оказываются в одном месте, но в разное время. Пространственноподобные интервалы заменой системы координат можно перевести в одновременные, но в разном месте.

[Лекция 3]

Принцип относительности Эйнштейна утверждает, что законы природы инвариантны при переходе из одной инерциальной системы координат в другую, при этом координаты преобразуются согласно преобразованиям Лоренца.

Этот принцип все время проверяется — все вновь открываемые законы физики должны удовлетворять принципу относительности Эйнштейна; если будет открыт закон, не удовлетворяющий принципу Эйнштейна, принцип придется пересмотреть.

С другой стороны, этот принцип играет эвристическую роль, ограничивая форму уравнений движения.

Сравним две структуры пространства-времени — галилеевскую и релятивистскую. В каждой из них события параметризуются точками четырехмерного пространства, параллельные переносы которого образуют $\mathbb{R}^4$.

В галилеевской структуре определено линейное отображение $t\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ — время. Если события одновременны $(t(b) - t(a) = 0)$, то между ними определено евклидово расстояние, т. е. множество одновременных событий образуют $\mathbb{R}^3$. И временно́е, и пространственное расстояния сохраняются при преобразованиях Галилея.

В релятивистском случае между каждыми двумя событиями a и b определен интервал $(a^0-b^0)^2-(a^1-b^1)^2-(a^2-b^2)^2-(a^3-b^3)^2$. Группа Пуанкаре состоит из аффинных преобразований, сохраняющих этот интервал.

Аберрация

Выпишем еще раз преобразования Лоренца в случае, если вторая система отсчета движется относительно первой со скоростью u в направлении оси x.

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Формулы преобразования скоростей:

$$v'_x = \frac{v_x+u}{1+v_x u/c^2}; \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+v_x u/c^2}; \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+v_x u/c^2}.$$

Пусть $v_z = v'_z = 0$, $v_x = v\cdot\cos\Theta$ и $v_y = v\cdot\sin\Theta$. Тогда

$$\operatorname{tg}\Theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v\sqrt{1-u^2/c^2}\cdot\sin\Theta}{v\cdot\cos\Theta+u}.$$

В частности, если $v = c$, то

$$\operatorname{tg}\Theta' = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}\cdot\sin\Theta}{\cos\Theta+u/c},$$

или

$$\sin\Theta' = \frac{v'_y}{c} = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}\cdot\sin\Theta}{1+\cos\Theta\cdot u/c}.$$

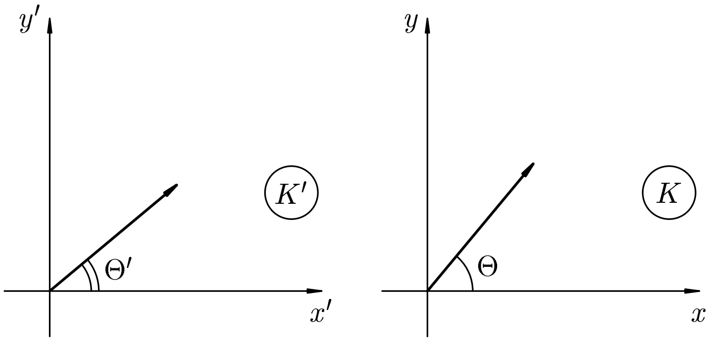


Рис. 5.

Пусть $u/c \ll 1$. Тогда

$$\sin\Theta' = \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}\cdot\sin\Theta}{1+\cos\Theta\cdot u/c} \approx \sin\Theta\cdot(1-u^2/2c^2)\times$$

$$\times(1-\cos\Theta\cdot u/c) \approx \sin\Theta\left(1-\frac{u}{c}\cdot\cos\Theta-\frac{u^2}{c^2}\right).$$

Если $\Theta', \Theta \ll 1$, то

$$\sin\Theta'\sin\Theta = 2\sin\frac{\Theta'-\Theta}{2}\cos\frac{\Theta'+\Theta}{2} \approx \Theta'-\Theta,$$

и

$$\Theta-\Theta' = -\frac{u}{c}\sin\Theta-\frac{u^2}{2c^2}\cdot\operatorname{tg}\Theta.$$

Здесь Θ — угол, например, на земле, а Θ' — угол относительно солнца.

Задача. Докажите, что множество преобразований, сохраняющих форму $t^2-x^2-y^2-z^2$, состоит из четырех связных компонент, а именно:

1) Связная компонента единицы.

2) Связная компонента пространственного отражения P : $x^i \to -x^i$, $x^0 \to x^0$ (латинскими буквами обозначаются пространственные координаты 1, 2, 3, а греческими буквами — все координаты).

3) Связная компонента обращения времени $T\colon x^i \to x^i$, $x^0 \to \to -x^0$.

4) Связная компонента преобразования PT.

Задача. Каждому вектору x^μ поставим в соответствие эрмитову матрицу размера 2×2:

$$\widehat{x} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x^0\mathbb{1} + x^i\sigma^i.$$

Докажите, что при изменении системы отсчета эта матрица преобразуется по правилу $\widehat{x}' = U^+\widehat{x}U$, где $U \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Таким образом, мы получаем для каждого собственного преобразования Лоренца (преобразований из связной компоненты единицы) элемент $U \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, и, тем самым, двумерное представление группы Лоренца $\psi \mapsto U\psi$, где $\psi = \binom{\psi_1}{\psi_2}$ — *двухкомпонентный спинор Вейля.*

Задача. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (уравнение Вейля) $(\partial_0 + \sigma^i\partial_i)\psi = 0$. Докажите, что это уравнение инвариантно относительно собственных преобразований Лоренца.

Поскольку физики долго считали, что в природе имеется инвариантность относительно полной группы Лоренца, включающей отражения, то вместо этого уравнения рассматривались другие уравнения (уравнения Дирака):

$$\begin{cases} (\partial_0 + \sigma^i\partial_i)\psi = m\overline{\psi}, \\ (\partial_0 - \sigma^i\partial_i)\overline{\psi} = m\psi. \end{cases}$$

Задача. Докажите, что уравнения Дирака инвариантны относительно P $(P\psi = \overline{\psi})$. Физический смысл m — масса, и эти уравнения описывают электроны.

Отступление. В 1956 году было открыто, что зеркальная симметрия P нарушается при слабом взаимодействии. Тогда Ландау предположил (и это подтвердилось), что нейтрино (у которого $m = 0$) описывается уравнением Вейля, а в зеркале мы видим антинейтрино. Нейтрино удовлетворяет CP-симметрии, где C — замена частицы на античастицу.

Вместо прямого произведения симметрий реализуется их комбинация.

Энергия и импульс релятивистской частицы

Важную роль в физике играют законы сохранения. В классической механике частицы обладают импульсом $\vec{p} = m\vec{v}$ и энергией $E = \dfrac{m\vec{v}^2}{2}$. Очевидно, они сохраняются при движении одной частицы. Более того, сумма таких величин сохраняется и при столкновениях. Такие величины называют *интегралами движения.*

Однако при преобразованиях Лоренца эти величины не преобразуются так, как должны преобразовываться. Поэтому они не могут быть интегралами движения.

Постулируем (пока), что и в релятивистском случае частица обладает четырьмя первыми интегралами, причем E — скаляр относительно вращений, а $\vec{p}$ — вектор при вращениях.

Импульс должен быть вектором, одинаковым по направлению со скоростью, а величина его должна зависеть только от величины скорости. Таким образом, $\vec{p} = m(v^2)\vec{v}$, где m — некоторая функция. Аналогично $E = E(v^2)$.

Проведем следующий мысленный эксперимент. Наблюдатели K и K', расположенные в плоскости $0xy$, движутся друг относительно друга с относительной скоростью v по оси x. Они бросают вдоль координаты y одинаковые шары с одинаковой по величине скоростью u так, чтобы произошло лобовое столкновение этих шаров.

Рассмотрим скорости шаров в системе координат, в которой K покоится. До столкновения: $v_x^A = 0$, $v_x^B = v$, $v_y^A = u$,

$v_y^B = -u\sqrt{1-v^2/c^2}$. После удара: $\widetilde{v}_x^A = 0$, $\widetilde{v}_x^B = v$, $\widetilde{v}_y^A = -u'$, $\widetilde{v}_y^B = u'\sqrt{1-v^2/c^2}$. Так как должно быть $p_x^A + p_x^B = \widetilde{p}_x^A + \widetilde{p}_x^B$, имеем

$$v \cdot m\left(v^2 + u^2 - \frac{u^2v^2}{c^2}\right) = v \cdot m\left(v^2 + (u')^2 - \frac{(u')^2v^2}{c^2}\right),$$

поэтому, если m взаимно однозначна, $u = u'$ или $u = -u'$. Также должно выполняться равенство $p_y^A + p_y^B = \widetilde{p}_y^A + \widetilde{p}_y^B$. Это значит, что

$$m(u^2) - \sqrt{1-v^2/c^2} \cdot m\left(v^2 + (u')^2 - \frac{(u')^2v^2}{c^2}\right) = 0.$$

Подставив $u = 0$, получаем

$$m(v^2) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Величина $m(0) = m$ называется массой покоя. Следовательно, импульс равен

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

При изменении системы координат импульс преобразуется следующим образом:

$$p_x' = \frac{m\dfrac{v+u}{1+vu/c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{(v/c+u/c)^2}{(1+uv/c^2)^2}}} = \frac{mv+mu}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{p_x + uE/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

где

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad E' = \frac{E+up}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Таким образом, $(E, \vec{p})$ — 4-вектор. При малых v

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Заметим, что $E^2-\vec{p}\,^2c^2=m^2c^4$, $x^0=ct$, $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$. Интервал: $(\Delta l)^2=(\Delta x^0)^2-(\Delta x^1)^2-(\Delta x^2)^2-(\Delta x^3)^2$.

$$\text{Пусть } g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}, \text{ тогда } (\Delta l)^2=g_{\mu\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu.$$

Физики используют запись (язык, придуманный Эйнштейном), согласно которой по повторяющимся индексам происходит суммирование. Кроме того, обычно греческие индексы принимают значения $0,1,2,3$, а латинские — только $1,2,3$.

Линейные преобразования, сохраняющие интервал $(\Delta l)^2$, называются *преобразованиями Лоренца*: $x^\mu\mapsto\widetilde{x}^\mu=a^\mu_\nu x^\nu$ (так физики записывают умножение вектора (x^ν) на матрицу (a^μ_ν), здесь μ — номер строки, ν — номер столбца).

Аффинные преобразования $x^\mu\mapsto\widetilde{x}^\mu=a^\mu_\nu x^\nu+b^\mu$, где (a^μ_ν) из группы Лоренца, называются *преобразованиями Пуанкаре*.

Вектором называется любая величина, имеющая 4 компоненты координаты, A^μ, которая при переходе в другую систему координат преобразуется как вектор

$$A^\mu\mapsto\widetilde{A}^\mu=a^\mu_\nu A^\nu.$$

Ковектором называется B_μ, преобразующаяся

$$\widetilde{B}_\mu\mapsto B_\mu=a^\nu_\mu\widetilde{B}_\nu.$$

Ковектор — это, на самом деле, элемент двойственного пространства.

Величина, преобразующаяся как произведение координат, $A^{\mu\nu}\mapsto\widetilde{A}^{\mu\nu}=a^\mu_{\mu_1}a^\nu_{\nu_1}A^{\mu_1\nu_1}$, называется 2-вектором или тензором типа $(2,0)$.

Пример. Метрика $g_{\mu\nu}$ при преобразовании координат меняется следующим образом:

$$\widetilde{g}_{\mu\nu}\widetilde{x}^\mu\widetilde{x}^\nu=\widetilde{g}_{\mu\nu}a^\mu_{\mu_1}x^{\mu_1}a^\nu_{\nu_1}x^{\nu_1}=(\widetilde{g}_{\mu\nu}a^\mu_{\mu_1}a^\nu_{\nu_1})x^{\mu_1}x^{\nu_1}=g_{\mu_1\nu_1}x^{\mu_1}x^{\nu_1},$$

следовательно, $g_{\mu_1\nu_1} = \widetilde{g}_{\mu\nu} a^{\mu}_{\mu_1} a^{\nu}_{\nu_1}$, и следовательно, $g_{\mu\nu}$ — 2-ковектор или тензор типа $(0, 2)$.

Обозначение $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ закреплено за стандартным антисимметрическим тензором ранга 4. Антисимметричность означает, что его компоненты меняют знак при перестановке любой пары индексов, кроме того, $\varepsilon_{0123} = 1$. *Рангом* называется число индексов тензора. В этих обозначениях форма объема равна $dV = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\, dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^{\lambda} \wedge dx^{\sigma}$. *Дуальным тензором* называется тензор, свернутый с $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$.

Пример. Пусть $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ — антисимметричный тензор. Тогда $(*F)$ по определению равен: $F^{*}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}$, где $F^{\lambda\sigma} = g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu} F_{\mu\nu}$ и $(g^{\lambda\mu}) = (g_{\mu\nu})^{-1}$.

Пусть (x^{μ}) и $(\widetilde{x}^{\mu})$ — локальные координаты в точке и $\widetilde{x}^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$. *Скалярное поле* — это функция от x, которая не меняется при преобразованиях координат, $\varphi(x) \mapsto \widetilde{\varphi}(\widetilde{x}) = \varphi(x)$. Векторное поле — это сечение касательного расслоения $A^{\mu}(x) \mapsto \widetilde{A}^{\mu}(\widetilde{x}) = a^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x)$.

Задача. Проверьте инвариантность уравнения

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\varphi = 0$$

относительно преобразований Пуанкаре.

(ЛЛ2, Гл. 1, § 1 – 14, с. 11 – 63.)

Лагранжева механика

Состояние классической системы, изменение ее во времени

В евклидовой системе координат положение частицы в системе определяется декартовыми координатами x^i_{α}, где $\alpha = 1, \ldots, N$ — номера частиц. Таким образом, $3N$ величин, задают положение частиц. В общем случае *обобщенные координаты* — это некие переменные q_i, задающие положения частиц в системе. Все возможные положения частиц или значений q_i в общем случае образуют *конфигурационное пространство.* Значения координат не определяют скоростей механической системы и не задают будущего.

Состояние задается значениями координат x^i_α и их производными по времени в данной точке — скоростями $\dot{x}^i_\alpha$. Все возможные состояния системы или значения $(q_i, \dot{q}_i)$ образуют *фазовое пространство.* Если состояние задано, то определяется будущее и прошлое системы с помощью уравнений движения (например, уравнений Ньютона).

Примеры:

1. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ — уравнение свободной частицы.
2. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$ — уравнение шарика на пружине.

Лагранж придал этим уравнениям в случае потенциальных сил форму

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

где $L = \dfrac{m\dot{x}^2}{2}$ в примере 1 и $L = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - \dfrac{kx^2}{2}$ в примере 2, причем $\dfrac{kx^2}{2}$ — потенциальная энергия.

Телеологический принцип

Почему в однородной среде свет распространяется по прямой? Можно дать следующий ответ: потому что время, затрачиваемое им в этом случае, минимально. Это подтверждается также при преломлении. В этом случае свет, добиваясь минимизации суммарного времени, предпочитает пройти больше по тому участку, где его скорость выше, чтобы сэкономить там, где его скорость меньше.

«Все к лучшему в этом лучшем из миров» — провозглашает *телеологический принцип.* Свет, и вообще любая система, идет по такому пути, чтобы сделать «нечто» наименьшим. Это «нечто» есть действие S, функционал от траектории

$$S^{\text{реальное}} = \min S.$$

В классической теории будущее состояние однозначно предопределено настоящим, поэтому мы не можем одновременно допускать это и верить в то, что существует свобода воли (один из важнейших принципов христианства).

В квантовой теории этого противоречия нет. Оказывается, что система идет сразу по многим траекториям. При этом амплитуда вероятности того, что система перейдет из точки A в точку B равна $\int e^{iS/\hbar}$, где интеграл берется по множеству всех траекторий, соединяющих A и B, а S — действие на данной траектории. Классические уравнения получаются, когда $\hbar \to 0$. В результате интерференции усиливаются траектории вблизи классической. Теперь будущее не однозначно определяется настоящим, и противоречия с принципом свободы воли нет.

Вариационное исчисление и принцип наименьшего действия

Вариационное исчисление занимается отысканием экстремумов функций, область определения которых — бесконечномерное пространство (пространство кривых). Такие функции называют *функционалами*.

Исторически первой серьезной задачей вариационного исчисления была задача о линии наискорейшего спуска: по какой кривой в поле силы тяжести, соединяющей две данные точки, должно двигаться тело, чтобы время спуска было наименьшим? Напишем функционал, минимум которого — нужная кривая.

Маленький кусочек траектории длины $\sqrt{dx^2+dy^2}$ проходится за время $\sqrt{dx^2+dy^2}/v$, где v — скорость. Скорость можно найти из закона сохранения энергии: $\dfrac{mv^2}{2}+mgy=mgh$. Поэтому $v = \sqrt{2g(h-y)}$. Итак, нам надо минимизировать функционал

$$T=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+(dy/dx)^2}{h-y}}\,dx.$$

Другая задача с заранее известным ответом: кривая наименьшей длины, соединяющая две данные точки. Длина кривой $y =$

$= f(x)$ задается формулой $\Phi(f(x)) = \int \sqrt{1 + (df/dx)^2}\, dx$. Функционал можно представлять как функцию от бесконечного числа переменных: у функции $\Phi(f_1, \ldots, f_n)$ увеличивается число аргументов, и аргумент f_i постепенно превращается в $f(x)$.

Мы будем заниматься только *дифференцируемыми функционалами*, т. е. такими функционалами Φ, что $\Phi(f + h) - \Phi(f) = F(f, h) + R(f, h)$, где $F(f, h)$ зависит от h линейно, а $R(f, h) = O(h^2)$, т. е. из $|h| < \varepsilon$ и $\left|\dfrac{dh}{dx}\right| < \varepsilon$ следует, что $|R| < C\varepsilon^2$. Функционал F называют *дифференциалом*, или *первой вариацией*.

Пусть для всех функций $h(x)$ $\Phi(q(x) + \varepsilon h(x))$ имеет минимум при $\varepsilon = 0$. Это значит, что первая вариация $F(q, h) = \dfrac{d\Phi(q + \varepsilon h)}{d\varepsilon}$ равна нулю для всех функций $h(x)$. В этом случае функцию q называют *экстремалью* функционала Φ.

В лагранжевой динамике мы будем рассматривать только функционалы вида

$$A(q(t)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt,$$

где L — обыкновенная функция (а не функционал) от нескольких переменных. Такой функционал является дифференцируемым. Действительно,

$$F(x, h) = \frac{d}{d\varepsilon} A(x(t) + \varepsilon h(t)) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\varepsilon} L(x(t) + \varepsilon h(t), \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{h}(t))\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}) \cdot h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) \cdot \frac{d}{dt} h(t) \right)\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}) \cdot h(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) h(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h(t) \right)\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \cdot h(t) dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} (x, \dot{x}) h(t) \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

Теорема. Экстремали такого функционала подчиняются уравнению Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Доказательство. Так как мы оставляем неподвижными концы $x(t)$, то $h(t_0) = 0$ и $h(t_1) = 0$. Поэтому для всех h должно выполняться следующее равенство:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h(t)\, dt = 0.$$

Но если не выполнено уравнение Эйлера – Лагранжа, т. е. если существует t_2 такое, что

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \right) (t_2) \neq 0,$$

мы можем взять функцию h, почти везде равную 0, а в окрестности точки t_2 принимающую очень большие значения. Для такой h интеграл (1) не будет равен 0. Противоречие.

Уравнения Лагранжа

Все это нужно нам потому, что теперь мы можем доказать принцип наименьшего действия и переформулировать уравнения Ньютона в виде уравнений Эйлера – Лагранжа. Действительно, уравнения движения Ньютона для потенциальных сил имеют вид

$$\frac{d}{dt} m \dot{x}_\alpha^i = F_\alpha^i = -\frac{\partial U}{\partial x_\alpha^i}.$$

Введем функцию $L = T - U$ (лагранжиан), где

$$T = \sum_\alpha \sum_i \frac{m(\dot{x}_\alpha^i)^2}{2}.$$

(α — номер частицы). Элементарно проверяется, что уравнения Ньютона можно переписать в виде уравнений Эйлера – Лагранжа. Следовательно, это уравнение задает экстремаль функционала действия

$$A(x^i_\alpha(t), \dot{x}^i_\alpha(t)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(x^i_\alpha(t), \dot{x}^i_\alpha(t))\, dt.$$

Итак, принцип наименьшего действия доказан.

В уравнениях в форме Эйлера – Лагранжа можно делать произвольные замены координат $x^i_\alpha \to q_\alpha$, и от этого вид этих уравнений не изменится. В самом деле, экстремальность траектории не зависит от того, в каких координатах мы работаем. Уравнения Ньютона не обладают таким свойством. Величины q_α называют *обобщенными координатами*, а величины $\dot{q}_\alpha$ — *обобщенными скоростями*. Координаты и скорости задают состояние системы.

[Лекция 4]

Интегралы движения и симметрии

Принцип наименьшего действия позволяет связывать интегралы движения с симметриями.

Интегралы движения — это функции состояния I, сохраняющиеся при движении, т. е. $\dfrac{d}{dt}I(q, \dot{q}) = 0$.

Примеры первых интегралов:

1. Свободная частица: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$. Интегралы: $P = m\dot{x}$, $E = \dfrac{m(\dot{x})^2}{2}$.

2. Пусть $\dfrac{\partial}{\partial t}L = 0$. Рассмотрим величину $\dot{q}^i\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ (здесь, как и всегда, подразумевается суммирование по повторяющимся ин-

дексам):

$$\frac{d}{dt}\left(\dot q^i\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)=\frac{d^2q^i}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}+\dot q^i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}=$$
$$=\frac{d^2q^i}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}+\dot q^i\cdot\frac{\partial L}{\partial q^i}=\frac{d}{dt}L(q(t),\dot q(t)).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\dot q^i\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}-L\right)=0,$$

и мы получили первый интеграл — энергию

$$E=\dot q^i\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}-L=\mathrm{const}\,.$$

Симметриями называют однопараметрические группы преобразований конфигурационного пространства

$$q^i\to f^i(q,\varepsilon),\quad f^i(q,0)=q^i,$$

сохраняющие лагранжиан. В принципе, можно рассматривать и более сложные симметрии.

Теорема (Нётер). Каждой симметрии соответствует первый интеграл

$$I(q,\dot q)=\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\cdot h^i(q),\quad\text{где}\quad h^i(q)=\frac{\partial f^i}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0}.$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\cdot h^i\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)\cdot h^i+\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\cdot \dot h^i=\frac{\partial L}{\partial q^i}\cdot h^i+\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\cdot \dot h^i=$$
$$=\frac{\partial L}{\partial q^i}\cdot\frac{\partial f^i}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\cdot\frac{\partial \dot f^i}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{dL(f(q,\varepsilon),\dot f(q,\varepsilon))}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=0,$$

так как каждая симметрия сохраняет лагранжиан.

Пусть у нас есть несколько тел и их потенциальная энергия u зависит только от разностей $\vec x_a-\vec x_b$. Тогда преобразование $\vec x_a\to$ $\to\vec x_a+\vec\varepsilon$ — симметрия, а

$$p^k=\sum_a\frac{\partial L}{\partial \dot x_a^k}=\sum_a m_a\dot x_a^k,$$

импульс (первый интеграл, соответствующий этой симметрии).

Пусть имеется несколько тел и U является функцией от расстояний $|\vec{x}_a - \vec{x}_b|$. Тогда кроме параллельных переносов есть еще один набор симметрий — повороты:

$$x_a^i \to x_a^i + \omega^k \varepsilon_{kl}^i x_a^l.$$

Этой симметрии соответствует интеграл движения

$$M^k = \sum_a \varepsilon_{il}^k \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a^i} \cdot x_a^l = \varepsilon_{il}^k \sum_a p_a^i \cdot x_a^l = [\vec{p}, \vec{x}\,]^k$$

— момент количества движения.

Примеры систем

Пример 1. Свободная нерелятивистская частица:

$$L = \frac{m(\dot{x}^i)^2}{2}.$$

Приведем некоторые симметрии и соответствующие им интегралы движения.

(а) параллельные переносы $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{\varepsilon}$, $p^k = m\dot{x}^k = \text{const}$.

(б) повороты $x^i \to x^i + \omega^k \varepsilon^{ikl} x^l$, $M = [\vec{p}, \vec{x}\,] = \text{const}$.

(в) перенос во времени, $E = \dfrac{m(\dot{x}^i)^2}{2} = \text{const}$.

Пример 2. Рассмотрим две частицы в трехмерном пространстве, причем силы зависят только от расстояния:

$$L = \frac{m_1(\dot{x}_1)^2}{2} + \frac{m_2(\dot{x}_2)^2}{2} - u(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|).$$

Введем координаты

$$\vec{X} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2.$$

Пусть $M = m_1 + m_2$, величина $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ называется приведенной массой. В случае $m_1 \ll m_2$ $M \approx m_2$, $m \approx m_1$.

Ясно, что $L = \frac{M\dot{X}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(|\vec{x}|) = L_1 + L_2$, где $L_1 = \frac{M\dot{X}^2}{2}$, $L_2 = \frac{m\dot{x}^2}{2} - u(|\vec{x}|)$.

Мы видим, что такое движение распадается на два — движение свободной частицы и движение частицы в радиальном силовом поле. Исследуем последнее движение.

В этом случае сохраняются энергия $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(|\vec{x}|)$ и момент количества движения относительно $\vec{x} = 0$, т.е. величина $\vec{M} = [\vec{x}, \vec{p}]$. Так как $\vec{x} \perp \vec{M}$ и $\vec{M} = \text{const}$, движение происходит в плоскости. Введя в ней координаты r и φ, получаем

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Из конкретного вида L следует, что $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$. Такая координата называется *циклической*. Поэтому

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = M = \text{const}\,.$$

$\frac{1}{2}r \cdot r\dot{\varphi}$ — площадь сектора, пройденная за единицу времени. Итак, секториальная скорость постоянна. Это *второй закон Кеплера.*

$$E = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{ef}}(r),$$

где $U_{\text{ef}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$ называется *эффективной потенциальной энергией.* Поэтому

$$\int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{2(E-U) - M^2/mr}},$$
$$\Delta\varphi = \int \frac{(M/r^2)\,dr}{\sqrt{2(E-U) - M^2/mr^2}}.$$

Расстояние до центра колеблется между $r_{\min}$ и $r_{\max}$ (r может быть только таким, что $U_{\text{ef}}(r) < E$). Но, вообще говоря, траектории при таком движении незамкнуты, $\Delta\varphi \neq 2\pi n$.

Задача. Докажите, что в случае $U(r) = kr^2$ орбиты замкнуты.

Пример 3. Частица в кулоновом поле. Это частный случай предыдущего примера. $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ — кулоновый потенциал. В частности, это случай гравитации.

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \alpha/r.$$

В этом случае есть скрытая симметрия с группой O(4) и дополнительные 3 интеграла движения.

$$\vec{K} = [\vec{v}, \vec{M}] + \frac{\alpha\vec{r}}{r} = mv^2\vec{r} - m\vec{v}(\vec{v},\vec{r}) + \frac{\alpha\vec{r}}{r},$$
$$\vec{K} = m\vec{r}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - m\vec{v}r\dot{r} + \frac{\alpha\vec{r}}{r}.$$

Существование этого интеграла показывает, что орбита замкнута. Действительно, в момент, когда $\dot{r} = 0$, имеем $\vec{r} \parallel \vec{K}$, т. е. перигелий не смещается.

Докажем третий закон Кеплера. Уравнение движения планеты имеет вид

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\alpha\vec{r}}{r^3}.$$

Если мы заменим t на μt, а $\vec{r}$ на $\lambda\vec{r}$, причем $\mu^2 = \lambda^3$, уравнение сохраняется. Из этого следует, что $T^2 = \gamma r^3$.

Пример 4. Осциллятор.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}.$$

Такому уравнению удовлетворяют шарики на пружине, маятники. Имеется симметрия $x \to \lambda x$. Из нее следует независимость периода колебаний такого маятника от амплитуды.

Пример 5. Системы связанных осцилляторов.

$$L = \sum \frac{m_i\dot{x}_i^2}{2} - \sum \frac{k(x_i - x_{i+1})^2}{2}.$$

Задача. Перейдите к координатам, в которых этот лагранжиан распадается на несколько независимых лагранжианов.

Пример 6. Релятивистская частица (ЛЛ2, Гл. 3, § 15, с. 64 – 66).

В этом случае траектория лежит в четырехмерном пространстве-времени $(ct, x^1, x^2, x^3) = x^\nu$. Траектории должны переходить в траектории при преобразованиях Лоренца. Для этого достаточно, чтобы действие было лоренц-инвариантно. Мы можем выбрать на кривой в качестве параметра t. Тогда простейшее лоренц-инвариантное действие имеет вид

$$S = m \int \sqrt{c^2\,dt^2 - d\vec{x}^2} = mc^2 \int \sqrt{1 - (dx^i/dt)^2/c^2}\,dt.$$

Легко доказать, что экстремали этого действия (на самом деле на этих траекториях достигается минимум) — прямые.

Итак, лагранжиан $L = -mc^2\sqrt{1-(\dot{x}/c)^2}$. Уравнения Эйлера – Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i}.$$

Так как $\dfrac{\partial L}{\partial x^i} = 0$, импульс $\vec{P} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \mathrm{const}$.

Энергия имеет вид $E = \dot{x}^i p_i - L = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. При малых v энергия равна $mc^2 + \dfrac{m\vec{v}^2}{2}$. Первое слагаемое в этой сумме $E = mc^2$ можно интерпретировать как внутреннюю энергию. А вектор $p^i = (E/c, \vec{p})$ является 4-вектором, т. е. величина $(p^i)^2 = m^2$ сохраняется при преобразованиях Лоренца.

Структура пространства-времени — это вопрос не геометрии, а физики. Фактически, это вопрос о группе инвариантности уравнений движения. Его нельзя решить без эксперимента.

(ЛЛ1, Гл. 1 – 3, § 1 – 15, с. 9 – 55; Арн1.)

Теория поля

[Лекция 5]

Для возникновения теории поля имеются две причины.

Первая причина состоит в том, что мы можем рассматривать системы с бесконечным числом степеней свободы. Система с конечным числом степеней свободы описывается обобщенными координатами $q_i(t)$ и обобщенными скоростями $\dot{q}_i(t)$. Если число координат становится континуальным, мы начинаем иметь дело с полем $\varphi(x,t)$, где непрерывная величина x играет роль индекса i.

Например, колеблющаяся струна состоит из очень большого, фактически бесконечного, числа атомов, непрерывно распределенных вдоль нее, и каждый из них совершает колебания. В этом случае x — номер (координата) атома, а $\varphi(x,t)$ — амплитуда его колебания в момент времени t.

Вторая причина — существование предельной скорости (c). Из-за этого энергия взаимодействия должна перемещаться между источником и объектом взаимодействия, т. е. где-то помещаться. Это «где-то» и есть поле.

Возмущение поля в некотором месте вызывает изменения поля в соседних точках, которые, в свою очередь, распространяются дальше. Так в течение конечного времени осуществляется дальнодействие.

Законы поля представляются уравнениями в частных производных.

В случае электромагнитного поля сила, действующая на точечную заряженную частицу, определяется полем непосредственно в этой точке, и, наоборот, присутствие заряженной частицы изменяет поле во всем пространстве.

Поле — одна из главнейших идей новой физики, наряду с релятивистским и квантовым принципами.

Пример. Струна.

Пусть $\varphi(x)$ — отклонение точки струны с координатой x. Тогда $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ — ускорение точки с координатой x. По закону Гука

$$\rho\Delta x\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=k[(\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))-(\varphi(x)-\varphi(x-\Delta x))].$$

Разделив на Δx и перейдя к пределу, получаем

$$\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad \text{где}\ \ \lambda=\lim_{\Delta x\to 0}k\Delta x.$$

Это простейшее уравнение поля.

Мы хотим описать динамику поля с помощью принципа наименьшего действия. Действие имеет вид

$$A=\int\limits_{t_0}^{t_1}L\,dt.$$

Но в этом случае лагранжиан L — функция от $\varphi(x,t)$, $\dot\varphi(x,t)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$. В частности, в случае струны лагранжиан имеет вид

$$L=\int\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\,dx.$$

Поэтому действие можно переписать в виде

$$A=\int\mathcal{L}(\varphi,\dot\varphi,\varphi_x)\,dx\,dt, \tag{1}$$

$\mathcal{L}$ называют *плотностью лагранжиана*; в случае струны она имеет вид

$$\mathcal{L}=\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2.$$

Понятие вариации и экстремали легко можно обобщить на случай теории поля. В случае, если действие имеет вид (1), экстремали подчиняются следующему обобщению уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_x}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}.$$

В случае струны это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(2\lambda\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=0.$$

Мы видим, что это уравнение совпадает с уравнением струны. при постоянных ρ и λ. Это значит, что решения уравнения струны действительно являются экстремалями нашего функционала действия.

Уравнения Максвелла также могут быть записаны в виде принципа наименьшего действия. Релятивистская инвариантность ограничивает вид рассматриваемых лагранжианов.

Существует общий *принцип инвариантности*: если мы хотим, чтобы экстремали были инвариантны относительно некоторой группы преобразований, достаточно, чтобы лагранжиан был инвариантен относительно этой группы.

Напишем простейший лоренц-инвариантный лагранжиан. Пусть $\varphi(x,t)$ — скаляр относительно преобразования Лоренца, т. е. $\varphi'(x',t')=\varphi(x,t)$, если (x',t') получается из (x,t) преобразованием Пуанкаре. Пусть действие равно

$$S=\int\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-m^2\varphi^2\right]dx\,dt.$$

Теорема. Действие S инвариантно относительно преобразований Лоренца, т. е. $S[\varphi]=S[\varphi']$.

Действительно, градиент $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}$ — вектор, сохраняющийся при преобразованиях Лоренца. Квадрат этого вектора $(\partial_\mu\varphi)^2 = \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$, а следовательно и $\mathcal{L}=(\partial_\mu\varphi)^2-m^2\varphi^2$ — скаляр. Форма объема тоже лоренц-инвариантна. Уравнение для экстремалей этого действия:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-m^2\varphi=0$$

также лоренц-инвариантно. Его называют *уравнением Клейна–Гордона.*

Пространственно-временные симметрии и тензор энергии-импульса

Если лагранжиан лоренц-инвариантен, то существует сохраняющийся тензор энергии-импульса, выражающийся через φ и его производные, причем:

1) $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$;

2) $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Пусть $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$ — лоренц-инвариантная плотность лагранжиана, зависящая от нескольких тензорных полей φ. Это значит, что действие

$$A[\varphi] = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)\, d^4x$$

инвариантно относительно преобразований $x \to x + \varepsilon$ при $\varepsilon = \text{const}$ или $\varepsilon^\mu = \omega^{\mu\nu}x^\nu$. Рассмотрим вариацию функционала A при бесконечно малом преобразовании такого вида для произвольного ε. Она имеет вид

$$\delta A = \int \partial_\mu\varepsilon_\nu \cdot T^{\mu\nu}(x)\, d^4x.$$

Это следует из того, что вариация должна быть линейна по ε и исчезать в случае $\partial_\mu\varepsilon_\nu = 0$ — постоянных ε.

Из лоренц-инвариантности следует, что $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Для уравнений движения

$$\delta A = \int \partial_\mu\varepsilon_\nu T^{\mu\nu}\, d^4x = -\int \varepsilon_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu}\, d^4x = 0.$$

Ввиду произвольности ε, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Пример 1. Если

$$S = \int [(\partial_\mu\varphi)^2 - m^2\varphi^2]\, d^4x,$$

то

$$T^{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi \cdot \partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}[(\partial_\mu\varphi)^2 - m^2\varphi^2].$$

Пример 2. Если

$$S = \int (\partial_\mu \overline{\psi} \cdot \partial_\mu \psi - m^2 \overline{\psi} \psi)\, d^4 x,$$

то

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \overline{\psi} \cdot \partial_\nu \psi - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Более подробный вывод см. ДНФ, с. 338.

Электромагнетизм

Электрическое поле. К его открытию привели невинные опыты с эбонитовыми палочками, а также наблюдения и небезопасные эксперименты над грозными погодными явлениями. На современном языке сила, с которой действует электрическое поле, связана с напряженностью $\vec{E}$ следующей формулой:

$$\vec{F} = e\vec{E},$$

где e — заряд, $\vec{E}$ — электрическое поле.

Магнитное поле. Магнит в природе открыт давно. Компас изобретен китайцами более 1000 лет назад. Магнит действует на магнит и на проводник с током. Это значит, что поле магнита действует на движущийся электрический заряд. Это уже зародыш объединения электричества и магнетизма. В современной форме эти законы выражаются в форме закона Лоренца для силы $\vec{F} = \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]$. Итак, $\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]$.

Уравнения Максвелла

1) *Закон Гаусса.* Силовые линии электрического поля начинаются и кончаются на зарядах. Поток электрического поля через поверхность равен заряду внутри ее, т. е.

$$\int\limits_{\partial D} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q = 4\pi \int\limits_{D} \rho \, dv,$$

где ρ — плотность электрического заряда.

Раньше все законы записывались примерно в такой форме — в форме интегралов. Первое, что сделал Максвелл, — это переписал уравнения в дифференциальной форме, и их стало проще анализировать:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho.$$

2) *Отсутствие магнитных монополей.* Никто не мог отрезать у магнита полюс: отрежешь полюс, думаешь, остался только один — но нет, их опять два. Силовые линии магнитного поля нигде не начинаются и нигде не кончаются. Это значит, что отсутствуют магнитные монополи, т. е.

$$\int\limits_{\partial D} \vec{H}\, d\vec{S} = 0,$$

или, в дифференциальной форме,

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

3) *Индукция Фарадея — начало объединения.* Если магнит движется внутри замкнутого проводящего контура, то в контуре возникает ток. Циркуляция электрического поля равна

$$\oint\limits_{\partial\Gamma} \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Gamma} \vec{H}\, d\vec{S},$$

или, в дифференциальной форме,

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\vec{H}}{dt}.$$

4) *Закон Ампера* — ток создает циркуляцию магнитного поля:

$$\oint\limits_{\partial\Gamma} \vec{H}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_{\Gamma} \vec{j}\, d\vec{S},$$

или, в дифференциальной форме,

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\cdot\vec{j}.$$

Максвелл заметил, что из закона Ампера следует, что заряд не может вытекать из области, что бывает не всегда, т. е.

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

(это следует из того, что $\operatorname{div}\operatorname{rot} \vec{H} = 0$).

Закон Ампера был проверен в стационарном случае. Отличие должно проявляться в нестационарном случае. Максвелл добавил в закон Ампера еще один член, и получилось

$$\operatorname{rot} \vec{H} + \frac{1}{c}\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{4\pi}{c} \cdot \vec{j}.$$

Из уравнений Максвелла следует, что электрические и магнитные поля могут распространяться. Существуют электромагнитные волны. Оказалось, что скорость распространения этих волн совпадает со скоростью света. Именно из этого Максвелл сделал вывод о том, что свет имеет электромагнитную природу.

Лоренц-инвариантность уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразования Галилея. Лоренц (до открытия Эйнштейном теории относительности) обнаружил формальную инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований

$$x \to \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t \to \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Если одновременно преобразовывать $\vec{E}$ и $\vec{H}$ следующим образом:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y + H_z v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z - H_y v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$H'_x = H_x, \quad H'_y = \frac{H_y - E_z v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad H'_z = \frac{H_z + E_y v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

то форма уравнений Максвелла сохранится.

Эта симметрия делается более очевидной, если переписать уравнения Максвелла в четырехмерных обозначениях (см. ДНФ, с. 184, 344).

$$\partial_0 = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$
$$F_{0i} = E_i; \quad F_{ik} = -\varepsilon_{ikl}H_l; \quad j = (c\rho, \vec{j}).$$

Задача. Выпишите матрицы (F^{ik}) и $(F_{\mu\nu})$ через $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Выпишите $(F^*_{\mu\nu})$ через $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Уравнения Максвелла делятся на две пары. Первая пара — это второе и третье уравнения, которые не зависят от зарядов и токов, вторая — первое и четвертое уравнения, которые зависят.

$$\begin{gathered} \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\nu. \end{gathered} \tag{2}$$

Задача. Выпишите соответствие между уравнениями (2) и уравнениями Максвелла.

В этой записи инвариантность очевидна, если считать $F_{\mu\nu}$ тензором, а j^μ — вектором по отношению к преобразованиям Лоренца.

Векторный потенциал, калибровочная инвариантность

Попробуем решить первую пару уравнений Максвелла, т. е. первое уравнение из (2).

Если A_μ — векторное поле, то

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

удовлетворяет первой паре уравнений Максвелла. Верно и обратное: если $F_{\mu\nu}$ удовлетворяет первому уравнению из системы (2), то существует векторное поле A_μ, называемое *векторным потенциалом*, такое, что $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Представление $F_{\mu\nu}$ в форме

$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ не единственно. Действительно, если $\widetilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$, то $\widetilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$.

Трехмерная запись электромагнитного поля через векторный потенциал:

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}; \quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \text{где} \ \ \varphi = A_0.$$

Попробуем найти лагранжиан для заряженной релятивистской частицы в электромагнитном поле. Сначала предположим, что электромагнитное поле дано, т. е. оно не зависит от заряженных частиц.

Нам надо найти такое $S[x^\mu(\tau), A_\mu(x)]$, чтобы уравнение $\delta S = 0$ было эквивалентно
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}].$$

Очевидно, действие должно быть лоренц-инвариантно и калибровочно-инвариантно. Рассмотрим действие вида

$$S = -mc\int ds - \frac{e}{c}\int A_\mu\, dx^\mu,$$

где интегралы берутся вдоль траектории. Первое слагаемое — действие для свободной частицы. Лоренц-симметрия очевидна. Видно также, что действия для A_μ и $A_\mu + \partial_\mu f$ отличаются на константу $f(b) - f(a)$, а значит, экстремали этих действий совпадают.

Задача. Выведите уравнения движения, исходя из $\delta S = 0$.

Замечательным обстоятельством является то, что такая вспомогательная, казалось бы, вещь, как $A_\mu(x)$, позволяет написать простое выражение для действия. Выражения для действия, использующие $F_{\mu\nu}$, очень сложны и некрасивы. Это *сигнал*, указывающий на фундаментально значение векторного потенциала, которое выявляется в квантовой механике.

(ЛЛ2, Гл. 3 – 5, § 15 – 45, с. 64 – 142.)

[Лекция 6]

Электромагнитные волны. Волновое уравнение

Уравнения Максвелла в пустоте имеют вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}; & \operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{H} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}; & \operatorname{div}\vec{E} = 0. \end{cases}$$

Оказывается, эти уравнения могут иметь отличные от нуля решения, меняющиеся со временем. Это говорит о том, что электромагнитные волны могут распространяться, даже когда нет зарядов и токов.

Выразим $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через векторный потенциал $A_\mu = (A_0, \vec{A})$. Выбор векторного потенциала неоднозначен, поэтому мы можем наложить на него дополнительное условие, с тем чтобы избавиться от произвола и упростить решения. Такие условия называются *выбором калибровки*.

Выберем калибровку $A_0 = 0$. В этой калибровке

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Выражения для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ через векторный потенциал, разумеется, автоматически удовлетворяют первой паре уравнений Максвелла. Подставим эти выражения во вторую пару:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = -\Delta\vec{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}.$$

Несмотря на выбор калибровки $A_0 = 0$, мы можем делать дополнительные калибровочные преобразования $\vec{A} = \vec{A} + \operatorname{grad} f$, если f не изменяется во времени. Из уравнения $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ следует, что $\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = 0$. Поэтому мы можем выбрать f так, чтобы $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. В этом случае $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = -\Delta\vec{A}$ и уравнения Максвелла принимают вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = 0. \tag{3}$$

Это и есть волновое уравнение.

Другой вывод. Уравнения Максвелла в пустоте имеют вид $\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$, где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Поэтому

$$\partial_\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A_\mu = 0.$$

Выберем калибровочное условие $\partial_\mu A_\mu = 0$. Такой выбор называют *калибровкой Лоренца*, это условие слабее, чем предыдущее. Получаем $\partial_\mu \partial_\mu A_\nu = 0$, т. е. $\Delta A_\nu = 0$.

Вернемся обратно в калибровку $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ и $A_0 = 0$. Рассмотрим частный случай, когда A_μ зависит лишь от x и t. Для каждой из компонент уравнение (3) имеет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0.$$

Отсюда видно, что решения (3) имеют вид

$$f(t, x) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right). \tag{4}$$

Первое слагаемое в (4) — это плоская волна, бегущая со скоростью c в положительном направлении оси x: то, что находится в данный момент в данной точке, через время Δt сдвинется на расстояние $c\Delta t$ по оси x. Второе слагаемое — плоская волна, бегущая в другую сторону.

Так как A не зависит от y и z, т. е. $\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{\partial A}{\partial z} = 0$, то из $\operatorname{div} A = 0$ следует, что $\dfrac{\partial A_x}{\partial x} = 0$. Тогда из уравнения следует, что $\dfrac{\partial A_x}{\partial t} = 0$; т. е. $A_x = \mathrm{const}$ — постоянное электрическое поле вдоль оси x. Будем считать, что этого поля нет, и что $A_x = 0$. Тогда $\vec{A}$ перпендикулярно оси x и

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A} = [\nabla, \vec{A}] = -\frac{1}{c}\left[\vec{n}, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right] = -\frac{1}{c}[\vec{n}, \vec{E}],$$

так как $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}\,\vec{n} - tc)$, где $\vec{n}$ — единичный вектор вдоль оси x. Таким образом, в плоской волне $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны.

Поток энергии электромагнитной волны равен

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} \cdot E^2 \vec{n} = \frac{c}{4\pi} \cdot H^2 \vec{n};$$

Плотность энергии электромагнитного поля равна

$$W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}.$$

Здесь (W, S_1, S_2, S_3) — четыре компоненты тензора энергии импульса $T_{\mu\nu}$ для электромагнитного поля, а именно, $W = T_{00}$, $S_i = T_{i0}$.

Задача. Выведите из общего вида тензора энергии-импульса последнее равенство.

Задача. Непосредственно из уравнений Максвелла выведите, что $\dfrac{\partial W}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{S}$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \int\limits_D W = \int\limits_{\partial D} \vec{S}\, d\vec{s}.$$

Частный случай плоской волны — монохроматическая волна:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{A}, \quad \text{и, следовательно,} \quad \Delta \vec{A} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{A} = 0.$$

Решения этого уравнения имеют вид $\vec{A} = \operatorname{Re} \vec{A}_0 e^{-i\omega(t - x/c)}$, где $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$ — длина волны, $\vec{k} = \dfrac{\omega}{c}\vec{n}$ — волновой вектор. Если вектор $\vec{n}$ не сонаправлен оси x, то решение имеет вид $\vec{A} = \operatorname{Re} \vec{A}_0 e^{-i\omega(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$.

(ЛЛ2, Гл. 6, § 46 – 52, с. 143 – 170.)

Запаздывающие потенциалы (потенциалы Лиенара – Вихерта)

Мы разобрались с электромагнитными волнами в пустоте. Теперь посмотрим, как волны излучаются потенциалами.

Сначала рассмотрим случай, когда заряды и токи не зависят от времени.

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho; \quad \operatorname{rot}\vec{E} = 0, \quad \text{следовательно,} \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Функцию φ называют скалярным потенциалом. Из этих уравнений следует уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{5}$$

Сначала найдем решение для точечного заряда, расположенного в начале координат; общее решение мы можем найти по линейности.

Из соображений симметрии ясно, что $\vec{E}$ должно быть направлено по радиусу, и что $|\vec{E}|$ зависит лишь от R. Тогда из равенства $\int \vec{E}\,d\vec{s} = 4\pi Q$ следует, что $E\cdot 4\pi R^2 = 4\pi Q$.

Уравнение $|\vec{E}| = Q/R^2$ или $\vec{E} = Q\vec{R}/R^3$ — это закон Кулона и $\varphi = Q/R$. Из (5) и последней формулы следует, что $\Delta\dfrac{1}{R} = -4\pi\delta^3(\vec{R})$. Если зарядов много, то $\varphi = \sum\dfrac{e_\alpha}{R_\alpha}$ или $\varphi = \sum\dfrac{e_\alpha}{|\vec{R}-\vec{r}_\alpha|}$, где R_α — расстояние от заряда e_α до наблюдателя, $\vec{R}$ — координаты наблюдателя, $\vec{r}_\alpha$ — координаты заряда e_α. В случае непрерывного распределения

$$\varphi(\vec{R}) = \int\frac{\rho(\vec{r})\,d\vec{r}}{|\vec{r}-\vec{R}|}.$$

Для статических токов формулы аналогичные.

Теперь пусть заряды меняются со временем. Тогда в калибровке $\partial_\mu A_\mu = 0$ уравнения выглядят так:

$$\Delta A_\mu = \frac{4\pi}{c}j_\mu$$

или

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{A}}{dt^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j},$$
$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{dt^2} = -\frac{4\pi}{c}\rho.$$

Как и в статическом случае, разобьем пространство на маленькие объемчики. Плотность заряда $\rho = e(t)\delta(\vec{R})$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{dt^2} = -\frac{4\pi}{c}e(t)\delta(\vec{R})$$

и везде, кроме начала координат,

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Из симметричности следует, что φ зависит лишь от R. Переписав Δ в сферических координатах, получаем

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}) - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Подставим $\varphi = \dfrac{\chi(R,t)}{R}$. Тогда $\dfrac{\partial^2\chi}{\partial R^2} - \dfrac{1}{c^2}\cdot\dfrac{\partial^2\chi}{dt^2} = 0$, т. е.

$$\chi = f_1(t - R/c) + f_2(t + R/c).$$

Рассмотрим частное решение вида $\varphi = \dfrac{\chi(t - R/c)}{R}$ и найдем φ в начале координат. Устремляя $R \to 0$ и отбрасывая член $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$, не содержащий больших производных по R, получаем при $R \to \to 0$, что $\Delta\varphi = -\dfrac{4\pi}{c}e(t)\delta(\vec{R})$. Это уравнение мы уже решали: $\varphi = \dfrac{e(t - R/c)}{R}$. Физический смысл этого решения: потенциал создается зарядом в момент времени на $\dfrac{R}{c}$ раньше текущего. Окончательный ответ:

$$\varphi(\vec{R}) = \int \frac{\rho(\vec{r}, t - R/c)}{R}\,d^3r = \int \frac{\rho(\vec{r}, t - |\vec{R} - \vec{r}|/c)}{|\vec{R} - \vec{r}|}\,d^3r.$$

Аналогично

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}, t - |\vec{R} - \vec{r}\,|/c)}{|\vec{R} - \vec{r}\,|}\, d^3 r.$$

Эти формулы называются формулами *запаздывающих потенциалов* или *потенциалов Лиенара – Вихерта.*

Теперь разберемся, как излучаются волны. Пусть имеется система зарядов и токов в некотором шаре диаметра l, и мы смотрим на электромагнитное поле на расстоянии $R_0 \gg l$. В этой области

$$|\vec{R} - \vec{r}\,| \approx R - \vec{n}\vec{r},$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный к нам. На больших расстояниях мы можем пренебречь членом $\vec{n}\vec{r}$ в знаменателе:

$$\vec{A} = \frac{1}{cR}\int \vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c} - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}\right) d^3 r.$$

Более того, членом $\dfrac{\vec{r}\vec{n}}{c}$ также можно пренебречь, если $l \ll cT$, где T — характерное время изменения токов.

$$j\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c} - \frac{\vec{r}\vec{n}}{c}\right) \approx j\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c}\right),$$

$$\vec{A} = \frac{1}{cR}\int \vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c}\right) d^3 r.$$

Отсюда видно, что если R существенно больше l и длины волны $\lambda = cT$, т. е. если волны можно считать плоскими, то не только потенциал убывает как $\dfrac{1}{R}$, но и $\vec{H} = \operatorname{rot}\,\vec{A} = \dfrac{[\dot{\vec{A}}, \vec{n}]}{c}$ и $\vec{E} = [\vec{n}, \vec{H}]$ убывают, как $\dfrac{1}{R}$. Поэтому поток энергии $[\vec{E}, \vec{H}]$ пропорционален $\dfrac{1}{R^2}$ и полный поток энергии через каждую сферу, окружающую систему зарядов, остается постоянным. Другими словами, энергия действительно уходит. В случае статических зарядов $\vec{H} = 0$ и потока энергии нет.

Задача. Определите излучение диполя $\vec{d}$, вращающегося в плоскости с угловой скоростью Ω.

(ЛЛ2, Гл. 8, § 62 – 65, с. 207 – 220.)

[Лекция 7]

Реальность векторного потенциала в квантовой механике

В квантовой механике вероятность того, что частица перейдет из одной точки в другую, равна $|A|^2$, где A — амплитуда вероятности:

$$A = \sum e^{-iS/\hbar},$$

а сумма берется по всем возможным путям, S — действие, в которое, как мы видели, входит векторный потенциал.

Пусть у нас есть источник электронов, пролетающих через экран с двумя щелями. Наблюдается интерференционная картина. Минимум или максимум находятся в данной точке интерференционной картины — зависит от разности фаз. Рассмотрим соленоид бесконечной длины. Если по обмотке идет ток, то внутри соленоида возникает магнитное поле, но снаружи этого не происходит. Несмотря на это, если мы поместим соленоид между двумя пучками, туда, где не могут пролетать электроны, и включим ток, интерференционная картина сместится. Это происходит, потому что в силу $H = \operatorname{rot} A$ там, где пролетают электроны, изменяется векторный потенциал A (хотя и отсутствует H), а значит, изменяется и значение S. Этот якобы вспомогательный объект — векторный потенциал — является вполне физическим, и частицы с ним взаимодействуют.

Геометрия и калибровочные поля

Описание электромагнитных явлений приводит естественным образом к тензору напряженности $F_{\mu\nu}$ и векторному потенциалу A_μ. Оказывается, эти величины имеют замечательный геометрический смысл. Выявление этого смысла ведет к интересным и важным обобщениям.

Векторный потенциал $A_\mu(x)$ — это векторное поле. Физику определяет A_μ по модулю калибровочных преобразований $A_\mu \to \to A_\mu + \partial_\mu f$. Пусть $\psi(x)$ — комплексное поле. Рассмотрим действие группы $\mathrm{U}(1)^\infty = \prod \mathrm{U}_x(1)$ (произведения групп $U(1)$ в каждой точке) на полях $\psi(x)$, определенное формулой

$$\psi(x) \mapsto e^{if(x)}\psi(x).$$

Таким образом, в каждой точке мы имеем одномерное комплексное (или двумерное вещественное) представление группы $\mathrm{U}(1)$ (или $\mathrm{O}(2)$: $\psi = \psi_1 + i\psi_2$). Разность $\psi(y) - \psi(x)$ не является «правильным» объектом, ибо не преобразуется по представлению нашей (калибровочной) группы. Аналогично производная $\partial_\mu\psi$ не является правильным объектом. Чтобы обойти это, мы введем векторное поле $A_\mu(x)$, преобразующееся под действием нашего представления по формуле $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$, и с его помощью определим параллельный перенос $\psi(x)$ в точку y по кривой C, соединяющей x и y:

$$\psi(x \to y, C) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\int_c A_\mu\, dx^\mu}\psi(x).$$

Видно, что $\psi(x \to y, C)$ преобразуется так же, как и $\psi(y)$. Поэтому и $\psi(y) - \psi(x \to y, C)$ — правильный объект.

Если $y^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu$, то

$$\psi(x + \Delta x) - \psi(x \to x + \Delta x) = (\nabla_\mu\psi)\Delta x^\mu,$$

где

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - iA_\mu.$$

∇_μ называют *ковариантной производной*. Очевидно, что ∇_μ — вектор, как и ∂_μ, и при калибровочном преобразовании

$$\nabla_\mu\psi \to e^{if(x)}\nabla_\mu\psi.$$

Математические названия. Функций $\psi(x)$ называется *сечением расслоения*, $\mathrm{U}(1)$ — это *структурная группа* этого расслоения, A_μ — *связность*.

Мы определили параллельный перенос с помощью кривой C, соединяющей точки x и y. Зависит ли перенос от контура C?

Это определяется тем, равен ли 0 интеграл по замкнутому контуру $\oint A_\mu \, dx^\mu$. Этот интеграл сводится к сумме интегралов по маленьким контурам

$$\oint\limits_{\Delta S} A_\mu \, dx^\mu = F_{\mu\nu} \Delta S^{\mu\nu},$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$.

Параллельный перенос не зависит от пути, если $F_{\mu\nu} = 0$. Такое расслоение называется *плоским*, а величина $F_{\mu\nu}$ — *кривизной* связности A_μ.

Получаем, что тензор напряженности электромагнитного поля является кривизной.

Все, о чем говорилось только что, допускает обобщение на случай неабелевой калибровочной группы. Вместо скалярного поля $\psi(x)$ рассмотрим теперь векторное поле $\psi^i(x)$. Пусть U — некоторая группа G матриц $N \times N$, A_μ — матричнозначные функции $A_\mu^{ik}(x)$ со значениями в алгебре Ли группы U, причем при замене координаты x на y

$$A_\mu \to A'_\mu, \qquad A'_\mu(y) = A_\nu(x) \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}.$$

A_μ — это калибровочное поле или связность в линейном расслоении со структурной группой G.

Определим перенос из точки x в точку y по контуру C следующей формулой

$$\psi(x \to y, C) = \prod (1 + A_\mu \, dx^\mu).$$

Мы разбиваем кривую C на много маленьких кусочков и берем упорядоченное произведение значений на каждом кусочке:

$$\psi(x \to x + \Delta x) = (1 + A_\mu \Delta x^\mu) \psi(x).$$

При замене $\psi(x)$ на $g(x)\psi(x)$ связность преобразуется по следующей формуле:

$$A_\mu \to g A_\mu g^{-1} - (\partial_\mu g) \cdot g^{-1}.$$

По определению ковариантная производная равна

$$\nabla\psi = (\partial_\mu + A_\mu)\psi.$$

Теорема. Если $\psi(x) \to g(x)\psi(x)$, $A_\mu \to gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g \cdot g^{-1}$, то $\nabla_\mu\psi \to g\nabla_\mu\psi$.

Теорема. Определим кривизну $F_{\mu\nu}\psi = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi$. Тогда

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

В абелевом случае последний член, естественно, исчезает.

Историческое отступление

Это обобщение было придумано Янгом и Миллсом в 1954 году, по-видимому, из чисто эстетических соображений. В том же году Ландау и его сотрудники провозгласили *«теорему» о нуле заряда* (московский нуль), в которую все поверили и из которой следовало, что квантовая теория поля не может описывать взаимодействие элементарных частиц. Это убеждение просуществовало 20 лет (на протяжении которых почти никто квантовой теорией поля не занимался), которые понадобились для построения квантовой теории неабелевых калибровочных полей, после чего «теорема» о нуле заряда была проверена для этого случая и не подтвердилась. После этого квантовая теория поля была реабилитирована.

[Лекция 8]

На одной из предыдущих лекций мы ввели четырехмерный тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

и вектор тока $j^\mu = (c\rho, j_1, j_2, j_3)$. Теперь уравнения Максвелла могут быть записаны так:

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0,$$
$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j_\nu.$$

Напомним, что греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3,

$$\partial_0 = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Очевидно, эти уравнения обладают лоренц-инвариантностью, так как если тензор равен 0 в одной системе координат, то он равен 0 и в другой системе координат.

Первую пару уравнений Максвелла можно решить:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Векторный потенциал A_μ при этом определяется не однозначно, а с точностью до калибровочных преобразований

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f.$$

Эта ситуация является частным случаем расслоения со связностью.

Рассмотрим функцию ψ на пространстве Минковского со значениями в некотором N-мерном пространстве, или, другими словами, N функций $\psi^1(x), \ldots, \psi^N(x)$. Возьмем матричную группу G и функцию $g(x)$ со значениями в G. Калибровочное преобразование

$$g(x)\colon \psi(x) \to g(x)\psi(x) \quad (\psi^i(x) \to g^i_k(x)\psi^k(x))$$

(ψ на самом деле не функция, а сечение расслоения).

Функция $\partial_\mu\psi$ этим свойством не обладает, т.е. при замене $\psi(x)$ на $g(x)\psi(x)$ $\partial_\mu\psi(x)$ переходит не в $g(x)\partial_\mu\psi(x)$. Чтобы исправить это, вместо производной ∂_μ введем ковариантную производную $\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ (т.е. $(\nabla_\mu\psi)^i = (\partial_\mu\psi^i) + (A_\mu)^i_k\psi^k$). Мы хотим, чтобы при замене $\psi(x)$ на $g(x)\psi(x)$ выражение $\nabla_\mu\psi(x)$ переходило в $g(x)\nabla_\mu\psi(x)$. Для этого необходимо, чтобы A_μ переходило в $gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g \cdot g^{-1}$. Докажем это.

$$(\partial_\mu + gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g \cdot g^{-1})g\psi = \partial_\mu(g\psi) + gA_\mu\psi - \partial_\mu g \cdot \psi =$$
$$= \partial_\mu g \cdot \psi + g \cdot \partial_\mu\psi + gA_\mu\psi - \partial_\mu g \cdot \psi = g(\partial_\mu + A_\mu)\psi = g\nabla_\mu\psi.$$

В случае, если g — унитарная матрица 1×1, т. е. комплексное число, равное 1 по модулю, ($g(x) = e^{if(x)}$), получается $A_\mu \to A_\mu - i\partial_\mu f$.

С помощью связности определяется параллельный перенос

$$\psi(x \to x + dx) = (1 + A_\mu\, dx^\mu)\psi(x).$$

Это выражение преобразуется так же, как и $\psi(x + dx)$. Поэтому их можно вычитать, преобразуя ковариантную производную. С помощью этой формулы можно переносить $\Psi(x)$ по кривым, разбивая их на маленькие кусочки. (Параллельный перенос $\psi(x)$ по кривой является решением дифференциального уравнения $\nabla_v\psi = 0$, где v — касательный вектор к кривой.)

В общем случае результат параллельного переноса зависит от пути. Перенос не зависит от пути, если $F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = 0$. В этом случае связность называют *плоской*. Вычислим $F_{\mu\nu}$.

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\psi = (\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu + A_\nu)\psi =$$
$$= \partial_\mu\partial_\nu\psi + A_\mu\partial_\nu\psi + \partial_\mu(A_\nu\psi) + A_\mu A_\nu\psi,$$
$$\nabla_\nu\nabla_\mu\psi = \partial_\nu\partial_\mu\psi + A_\nu\partial_\mu\psi + \partial_\nu(A_\mu\psi) + A_\nu A_\mu\psi,$$
$$\partial_\mu(A_\nu\psi) = (\partial_\mu A_\nu)\psi + A_\nu(\partial_\mu\psi), \quad \partial_\nu(A_\mu\psi) = (\partial_\nu A_\mu)\psi + A_\mu(\partial_\nu\psi),$$
$$(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)\psi = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu])\psi.$$

Связность называют *тривиальной*, если ее можно калибровочным преобразованием привести к виду $A_\mu \equiv 0$.

Задача. Докажите, что связность является тривиальной, если $A_\mu = -\partial_\mu g \cdot g^{-1}$.

Действие электромагнитного поля

Есть уравнения двух сортов: первые описывают, как ведут себя частицы, вторые — как развиваются сами электромагнитные поля, например, уравнение Лоренца $\vec{F} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{H}]$ и уравнения Максвелла.

До сих пор выражением для действия частицы в электромагнитном поле было

$S = S_x + S_{x,A}$, где $S_x = mc\int ds$, $S_{x,A} = -\frac{e}{c}\int A_\mu\, dx^\mu$, здесь A_μ — заданная функция координат.

Задача. Докажите, что уравнение $\delta S = 0$ эквивалентно уравнению Лоренца.

Теперь мы хотим найти вид S_A так, чтобы вариация $S = S_x + S_{x,A} + S_A$ по A_μ приводила к уравнениям Максвелла. Ответ есть

$$S_A(A) = -\frac{1}{16c\pi}\int F_{\mu\nu}^2\, d^4x.$$

Если бы мы рассматривали S как функционал от $F_{\mu\nu}$, $\delta S = 0$ означало бы, что $F_{\mu\nu} = 0$. Но мы должны помнить, что на самом деле $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ и независимые переменные — A_μ.

$$\delta S_A = -\frac{1}{8c\pi}\int F_{\mu\nu}\,\delta F_{\mu\nu} = -\frac{1}{8c\pi}\int F_{\mu\nu}(\partial_\mu\,\delta A_\nu - \partial_\nu\,\delta A_\mu) =$$
$$= -\frac{1}{4c\pi}\int F_{\mu\nu}\partial_\mu\,\delta A_\nu = \frac{1}{4c\pi}\int \partial_\mu F_{\mu\nu}\,\delta A_\nu = 0.$$

Итак, уравнение $\delta S_A = 0$ эквивалентно уравнению $\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$, т. е. левой части второй пары уравнений Максвелла. Правая часть второй пары уравнений Максвелла получается, если проварьировать $S_{x,A}$ по A ($\delta S = \delta S_x + \delta S_{x,A} + \delta S_A$, $S_{x,A} = -\frac{e}{c}\int A_\mu\, dx^4$ переходит в $-\frac{1}{c^2}\int A_\mu j^\mu\, dx^4$). Первая пара уравнений Максвелла автоматически выполняется, так как мы считаем, что $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Расширение группы симметрий

Уравнения Максвелла в вакууме имеют более широкую группу симметрий, чем группа Пуанкаре. Это группа *конформных преобразований*, т. е. группа преобразований, сохраняющих углы, или группа преобразований $x^\mu \to y^\mu(x)$, для которых $(dy^\mu)^2 = \rho(x)(dx^\mu)^2$. Группа конформных преобразований содержит группу Пуанкаре, растяжения $x^\mu \to \lambda x^\mu$ и инверсию $x^\mu \to y^\mu = \frac{x^\mu}{\sum (x^\mu)^2}$, и эти преобразования порождают всю группу конформных преобразований. Группа конформных преобразований изоморфна $\mathrm{O}(4,2)$.

Задача. Проверьте предыдущие утверждения.

Поля Янга – Миллса

Формула действия для электромагнитного поля прямо обобщается на неабелев случай.

Рассмотрим форму кривизны $F_{\mu\nu}$. Это 2-форма с коэффициентами в алгебре Ли группы G, т. е. при каждом значении μ и ν величина $F_{\mu\nu}$ — это матрица $N \times N$ из алгебры Ли группы G, $F_{\mu\nu}^2$ — также матрица $N \times N$. У этой матрицы есть след $\operatorname{Tr} F_{\mu\nu}^2$, который называется *формой Киллинга.*

Положим $S = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{Tr} F_{\mu\nu}^2\, d^4x$. Связности $A_\mu(x)$, минимизирующие данное действие, называют полями Янга – Миллса.

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi}\int \operatorname{Tr} F_{\mu\nu}\nabla_\mu \delta A_\nu\, d^4x,$$

где $\nabla_\mu a = \partial_\mu a + [A_\mu, a]$.

$\delta S = 0$ означает, что

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu} = 0. \qquad (6)$$

Кроме того, всегда выполняются уравнения

$$\nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda F_{\mu\nu} = 0, \qquad (7)$$

которые называются *тождеством Бьянки.*

Уравнения (6) и (7) называются *уравнениями Янга – Миллса*, это нелинейные уравнения.

Задача. Докажите тождество Бьянки в неабелевом случае.

(ДНФ, ч. I, § 42, с. 403 – 406; ч. II, § 32, с. 732 – 750.)

[Лекция 9]

Топология пространства калибровочных полей с конечным действием

Будем считать пространство евклидовым и четырехмерным. Рассмотрим решения уравнений Янга – Миллса A_μ, для которых $S[A] < \infty$. Для этого достаточно, чтобы $F_{\mu\nu} = o\left(\dfrac{1}{|x|^2}\right)$ при $|x| \to \infty$ или $A_\mu = \partial_\mu g \cdot g^{-1} + o\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$ при $|x| \to \infty$.

Задача. Докажите, что из условия $F_{\mu\nu} = 0$ следует, что $A_\mu = (\partial_\mu g) \cdot g^{-1}$.

Так как $A_\mu = \partial_\mu g \cdot g^{-1} + o\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$, то при больших $|x| \gg 1$ получаем отображение

$$g\colon S^3 \to G.$$

Рассмотрим группу $G = \mathrm{SU}(2)$. $\mathrm{SU}(2) \simeq S^3$. Любое непрерывное отображение $g\colon S^3 \to S^3$ с точностью до гомотопической эквивалентности характеризуется целым числом $k \in \mathbb{Z} = \pi_3(S^3)$, совпадающим со степенью этого отображения.

Задача. Докажите, что $\pi_3(\mathrm{SU}(2)) = \mathbb{Z}$. Верно ли, что $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$, где G — произвольная простая группа Ли? Вычислите π_3 от $\mathrm{SO}(2)$, $\mathrm{SO}(3)$, $\mathrm{SO}(4)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SO}(m)$.

В случае $G = \mathrm{SU}(2)$ любой элемент $g \in G$ — это 2×2 матрица, удовлетворяющая условию $g^+ g = \mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ — единичная матрица. Любую такую матрицу g можно представить как сумму $g = n^0 \mathbb{1} + \sum\limits_{k=1}^{3} n^k \sigma_k$, где σ_k — матрицы Паули, с условием $\sum\limits_\mu (n^\mu)^2 = 1$ (напомним, что $n^\mu = n^\mu(x)$, функции точек нашего пространства $\mathbb{R}^4$).

Степень отображения g можно вычислить, проинтегрировав якобиан отображения.

Пример. Рассмотрим отображение $v\colon S_1^1 \to S_2^1$. Пусть на $S_1^1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ угловая координата α, а на $S_2^1 = \{(y_1, y_2) \mid y_1^2 + y_2^2 = R^2\}$ угловая координата φ. Тогда $2\pi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \int\limits_{S_2^1} \dfrac{-y_2\,dy_1 + y_1\,dy_2}{y_1^2 + y_2^2}$, но

$$\deg v = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{d\alpha} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi R^2}\int\limits_{S_1^1} -y_2(\partial_1 y_1\,dx_1 + \partial_2 y_1\,dx_2) + y_1(\partial_1 y_2\,dx_1 + \partial_2 y_2\,dx_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi R^2}\int\limits_{S_1^1} y_a \partial_\mu y_b\,dx^\mu \varepsilon^{ab} =$$

$$\overset{(\text{в случае } R=1)}{=} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_1^1} \varepsilon^{ab} y_a \partial_\mu y_b\,dx^\mu.$$

Задача. Докажите, что в случае отображения $P_k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, где $z = x_1 + ix_2$, $w = y_1 + iy_2$ и $w = P_k(z)$ — многочлен k-й степени, $\deg P_k(z) = k$.

Указание. В комплексном анализе это называется лемма Руше.

Задача. Вычислите трехмерный объем сферы $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ единичного радиуса.

Пусть $g\colon S^3 \to \mathrm{SU}(2) \simeq S^3$. Обе сферы вложены в $\mathbb{R}^4$. Будем, как и в примере, считать, что координаты в прообразе $(x^0, \ldots, x^3)$, а в образе — $(n^0, \ldots, n^3)$, $\sum (n^\mu)^2 = 1$.

Определим следующие дифференциальные формы:

$$\omega = \frac{1}{2}\, d\left(\sum (n^\mu)^2\right) = n^\mu\,dn^\mu,$$

$$\Omega = \sum_{\mu=0}^{3} (-1)^{\mu-1} n^\mu\,dn^0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dn^\mu} \wedge \ldots \wedge dn^3$$

(во второй формуле в каждом слагаемом один дифференциал, обозначаемый значком $\widehat{dn^\mu}$, пропущен).

Тогда

$$\omega \wedge \Omega = dn^0 \wedge dn^1 \wedge dn^2 \wedge dn^3. \tag{8}$$

Физики записывают форму Ω так:

$$\Omega = \frac{1}{6}\varepsilon_{abcd} n^a\, dn^b \wedge dn^c \wedge dn^d = d\tau,$$

$$g^*(\Omega) = \frac{1}{6}\varepsilon_{abcd} n^a (\partial_\mu n^b\, dx^\mu) \wedge (\partial_\nu n^c\, dx^\nu) \wedge (\partial_\lambda n^d\, dx^\lambda) =$$

$$= \frac{1}{6}\varepsilon_{abcd} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda,$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda = ds^{\mu\nu\lambda}.$$

Степень отображения g, как и в примере, задается интегралом

$$q = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{S^3} d\tau = \frac{1}{12\pi^2}\int\limits_{S^3} \varepsilon_{abcd} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d\, ds^{\mu\nu\lambda}. \tag{9}$$

Теорема. Выполнено следующее соотношение

$$\varepsilon_{abcd} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\partial_\mu g \cdot g^{-1})(\partial_\nu g \cdot g^{-1})(\partial_\lambda g \cdot g^{-1}). \tag{10}$$

Поскольку правая и левая части равенства (10) SU(2)-инвариантны, то достаточно доказать равенство в единице группы SU(2).

При $g = e$ $\quad n^0 = 1$, $n^1 = n^2 = n^3 = 0$. Кроме того, $\sum (n^\mu)^2 = 1$, следовательно, $\partial_\mu n^0 = 0$. Доказываемое равенство будет выглядеть так:

$$\varepsilon_{abcd} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d = \varepsilon_{bcd} \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\partial_\mu g)(\partial_\nu g)(\partial_\lambda g),$$

где $\partial_\mu g = \partial_\mu n^1 \sigma_1 + \partial_\mu n^2 \sigma_2 + \partial_\mu n^3 \sigma_3$, которое проверяется прямым вычислением.

Замечание. Мы рассматриваем след, поэтому в правой части нас интересует только коэффициент при $\mathbb{1}$.

Очевидно, что поля A_μ, асимптотики которых равны различным q, не могут быть продеформированы одно в другое.

Существует замечательное представление q через $F_{\mu\nu}$.

Теорема. Если $A_\mu = \partial_\mu g \cdot g^{-1} + o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ при $|x| \to \infty$, то $q = \frac{1}{16\pi^2} \operatorname{Tr} \int\limits_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu} F^*_{\mu\nu}\, d^4x$, где $F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}$.

Сначала покажем, что $\operatorname{Tr} \int\limits_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu} F^*_{\mu\nu}\, d^4x = \mathrm{const}$ при варьировании A_ν. Действительно,

$$\delta\left(\operatorname{Tr}\int\limits_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}\,d^4x\right) = \delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\operatorname{Tr}\int F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}\,d^4x\right) =$$

$$= \operatorname{Tr}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\int F_{\mu\nu}\delta F_{\lambda\sigma}\,d^4x =$$

$$= \operatorname{Tr}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\int F_{\mu\nu}(\nabla_\lambda \delta A_\sigma - \nabla_\sigma \delta A_\lambda)\,d^4x =$$

$$= 2\operatorname{Tr}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\int F_{\mu\nu}\nabla_\lambda \delta A_\sigma\,d^4x =$$

$$= 2\operatorname{Tr}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\int\limits_{S^3(R)} F_{\mu\nu}\delta A_\sigma\,d\tau^\lambda - 2\operatorname{Tr}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\int\limits_{\mathbb{R}^4}(\nabla_\lambda F_{\mu\nu})\delta A_\sigma\,d^4x = 0.$$

В последнем выражении граничный член представляет из себя интеграл по $S^3(R)$ от функции, равной $o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \cdot o\left(\frac{1}{|x|}\right) = o\left(\frac{1}{|x|^3}\right)$ при $|x| = R \to \infty$ и поэтому стремится к нулю при $|x| \to \infty$. Равенство нулю последнего члена эквивалентно тождеству Бьянки

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

Следовательно, $\int\limits_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}\,d^4x$ не меняется при непрерывных изменениях A_μ.

Кроме того, верно равенство

$$\nabla_\mu F^*_{\mu\nu} = 0. \tag{11}$$

Действительно,

$$\nabla_\mu F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu F_{\alpha\beta} + [A_\mu, F_{\alpha\beta}]\},$$
$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha.$$

Из-за кососимметричности $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) = 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\nabla_\mu F^*_{\mu\nu} &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) + A_\mu(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) - \\ &\quad - (\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta)A_\mu\} = \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + \partial_\mu A_\alpha \cdot A_\beta + A_\alpha\partial_\mu A_\beta + A_\mu\partial_\alpha A_\beta + A_\mu A_\alpha A_\beta - \\ &\quad - \partial_\alpha A_\beta \cdot A_\mu - A_\alpha A_\beta A_\mu\} = \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + (\partial_\mu A_\alpha \cdot A_\beta - \partial_\alpha A_\beta \cdot A_\mu) + \\ &\quad + (A_\alpha\partial_\mu A_\beta + A_\mu\partial_\alpha A_\beta) + (A_\mu A_\alpha A_\beta - A_\alpha A_\beta A_\mu)\} = 0\end{aligned}$$

из-за кососимметричности $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}) &= \mathrm{Tr}\left\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F^*_{\mu\nu} + (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)F^*_{\mu\nu}\right\} = \\ &= \mathrm{Tr}\left\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F^*_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu F^*_{\mu\nu} - A_\mu F^*_{\mu\nu} A_\nu\right\} = \\ &= \mathrm{Tr}\left\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F^*_{\mu\nu} + A_\mu[A_\nu, F^*_{\mu\nu}]\right\}.\end{aligned}$$

Здесь, и в дальнейшем, мы используем свойство циклической перестановки под знаком следа. Используя (11), получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}) &= \mathrm{Tr}\left\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)F^*_{\mu\nu} - A_\mu\partial_\nu F^*_{\mu\nu}\right\} = \\ &= \mathrm{Tr}\left\{\partial_\mu A_\nu \cdot F^*_{\mu\nu} - \partial_\nu(A_\mu F^*_{\mu\nu})\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left\{\partial_\mu A_\nu F_{\alpha\beta} - \partial_\nu(A_\mu F_{\alpha\beta})\right\} = \\ &= \mathrm{Tr}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left\{(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) - \partial_\nu(A_\mu\partial_\alpha A_\beta + A_\mu A_\alpha A_\beta)\right\} = \\ &= \mathrm{Tr}\left\{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) + (\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta - \partial_\nu A_\mu\partial_\alpha A_\beta - \right. \\ &\quad \left. - A_\mu\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta - \partial_\nu(A_\mu A_\alpha A_\beta)]\right\}.\end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta\} &= \frac{1}{3}\operatorname{Tr}\{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta)\},\\
\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[-(\partial_\nu A_\mu)(\partial_\alpha A_\beta)] &= \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta),\\
\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta &= 0.
\end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{gathered}
\operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}) = \operatorname{Tr}\left\{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[2(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) + \frac{4}{3}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta)\right]\right\} =\\
= \operatorname{Tr}\left\{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[2(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) + 2A_\nu\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + \frac{4}{3}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta)\right]\right\} =\\
= \operatorname{Tr}\left\{2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[\partial_\mu\left(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)\right]\right\} =\\
= \partial_\mu\left\{\operatorname{Tr} 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right]\right\}.
\end{gathered}$$

Обозначим $J_\mu = \operatorname{Tr}\left\{2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right]\right\}$. Пусть $B(R)$ — шар радиуса R в $\mathbb{R}^4$. Тогда

$$\begin{gathered}
\int\limits_{B(r)} \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu})\,d^4x = \int\limits_{B(r)} \partial_\mu J_\mu\,d^4x = \int\limits_{S^3(R)} J_\mu\,ds^\mu =\\
= 2\int\limits_{S^3(R)} \operatorname{Tr}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)ds^\mu. \qquad (12)
\end{gathered}$$

Воспользуемся теперь условием, что $F_{\mu\nu} \to 0$ при $R \to \infty$, т.е. $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -[A_\mu, A_\nu]$ и тем, что $2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu A_\nu = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, A_\nu] = -2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\mu A_\nu$. Получаем при $R \to \infty$

$$\begin{gathered}
\int\limits_{B(R)} \operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu})\,d^4x =\\
= 2\int\limits_{S^3(R)} \operatorname{Tr}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left(-A_\nu A_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)ds^\mu =
\end{gathered}$$

$$= -\frac{2}{3} \int\limits_{S^3(R)} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \operatorname{Tr}(A_\nu A_\alpha A_\beta)\, ds^\mu. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (9) и (10), получаем утверждение теоремы.

Замечание. Все вычисления, проведенные в доказательстве последней теоремы, — это рабочий аппарат физика и считается в физике «обычными обозначениями». Математики называют такой аппарат координатным и предпочитают работать в «бескоординатной» форме. Попробуем привести словарь перевода из одной формы в другую.

$\partial_\mu\, dx^\mu$	d — дифференциал
$F_{\mu\nu}$	$F = F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$ — 2-форма
$\frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho$	$dV = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$ — форма объема
$F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}$	$*F = F^*_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$ — сопряженная 2-форма

Например,

$$q = \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} F^*_{\mu\nu}\, d^4x =$$
$$= \frac{1}{32\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \operatorname{Tr} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}\, d^4x = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \operatorname{Tr} F \wedge F.$$

Из равенства (8) и того, что $\omega = \frac{1}{2}\, d(\sum (n^i)^2)$ — форма, ортогональная к сфере S^3, следует, что Ω — форма трехмерного объема на S^3.

Тождество Бьянки записывается как

$$[\nabla, F] = dF + A \wedge F - F \wedge A = 0.$$

Вместо J_μ нужно рассматривать дифференциальную форму $J = J_\mu\, ds^\mu$. Тогда равенство (12) есть просто теорема Стокса.

Задача. Проведите доказательство последней теоремы в бескоординатной форме.

Вернемся к нашему действию $S[A]$. Получаем, что

$$S[A] = \frac{1}{4}\operatorname{Tr}\int F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,d^4x = \\ = \frac{1}{8}\operatorname{Tr}\int (F_{\mu\nu} - F^*_{\mu\nu})^2\,d^4x + \frac{1}{4}\operatorname{Tr}\int F_{\mu\nu}F^*_{\mu\nu}\,d^4x \geqslant 8\pi^2 q.$$

Если минимум существует, то поле, на котором он достигается, должно удовлетворять уравнению *дуальности*: $F_{\mu\nu} = F^*_{\mu\nu}$.

Решения этого уравнения называют *инстантонами*.

Задача. Докажите следующие утверждения.

1) При $q = 1$ решения уравнения дуальности имеют вид

$$A_\mu = \frac{x^2}{x^2+\rho^2} n^+ \partial_\mu n,$$

где

$$n = \frac{x_0 \mathbb{1} + i\vec{x}\vec{\sigma}}{|x|}, \quad n^+ = \frac{x_0 \mathbb{1} - i\vec{x}\vec{\sigma}}{|x|}, \quad \vec{x}\vec{\sigma} = x^\mu \sigma_\mu.$$

2) Эти решения сферически симметричные.

3) Остальные решения получаются из этого действием группы $x_\mu \to x_\mu + a_\mu; x_\mu \to \lambda x_\mu$.

4) Решения составляют 5-параметрическое семейство.

Известно, что для $q > 0$ существует $(8|q|-3)$-параметрическое семейство решений уравнения автодуальности.

Подробности см. ДНФ, ч. II, § 32.

[Лекция 10]

Общая теория относительности

Специальная теория относительности показала, что геометрия играет важную роль в физике. Общая теория относительности идет дальше и делает шаг к тому, чтобы свести физику к геометрии, а именно, гравитация сводится к метрической структуре пространства-времени.

Роль гравитации играет риманова (псевдориманова) структура пространства-времени, на кривизну которой влияет плотность энергии-импульса материи. При этом частицы самой материи движутся по геодезическим.

Специальная теория относительности не совместима с Ньютоновской теорией гравитации, основанной на постулате мгновенного дальнодействия.

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 4\pi k\rho, \\ \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\operatorname{grad}\Phi, \end{cases}$$

здесь Φ — гравитационный потенциал, ρ — плотность массы материи, $\vec{r}(t)$ — координаты частицы.

Эти уравнения можно модифицировать так, чтобы взаимодействие было запаздывающим и передавалось со скоростью света, но при этом свет не будет искривляться в гравитационном поле, что противоречит опыту: *при полных солнечных затмениях видимые положения звезд отличны от истинных.*

(ЛЛ2, с. 288 – 317, 330 – 408; ДНФ, с. 372 – 386, 705 – 732.)

Основания для расширения постулата относительности

Эйнштейн искал обобщения СТО из философских соображений. Ему не нравилась выделенность инерциальных систем отсчета.

Пусть R_1, R_2 два соосных кольца, одно из которых покоится, а другое вращается. Причиной того, что $\pi(R_2) \neq 3.14\ldots$, а

$\pi(R_1) = 3.14\ldots$, выставлялось то, что R_1 покоится относительно галилеева пространства, т. е. такого, относительно которого верен закон инерции, а R_2 — нет. Но, очевидно, это фиктивная причина. Нет такого опытного факта, как галилеево пространство.

Законы природы должны быть справедливы для произвольно движущихся систем. Это называется *постулатом общей ковариантности.*

Важный физический факт. Пусть K — галилеева система, масса M покоится в ней. Пусть K' равноускоренно и прямолинейно движется относительно K. Тогда M совершает относительно K' ускоренное движение, причем ускорение не зависит от физического и химического состояния тела. Может ли наблюдатель, покоящийся в K', заключить, что он «действительно» находится в ускоряющейся системе отсчета? Нет! Ибо такое поведение масс можно объяснить наличием гравитационного поля, вызывающего ускоренное движение, причем так, что ускорение не зависит от массы тела, его физического и химического состава. Еще Галилей задавал себе вопрос о равенстве инерционной и гравитационной масс. Эксперимент Этвеша показал, что

$$\frac{m_{\text{тяж}} - m_{\text{инер}}}{m_{\text{тяж}}} < 10^{-8},$$

поэтому можно считать, что $m_{\text{тяж}} = m_{\text{инер}}$.

Из этого равенства следует, что гравитационное поле локально можно создать или уничтожить изменением координатной системы. Это утверждение называется *принципом эквивалентности.*

Это, в свою очередь, означает, что общая теория относительности — это теория гравитации.

[Лекция 11]

Гравитация и геометрия

Нет оснований предполагать, что систему координат можно выбрать так, чтобы она была галилеевой или евклидовой. Поэтому следует допустить произвольные системы координат и искать формулировку законов природы, ковариантную относительно любых замен координат.

Итак, каждому событию соответствует (x_1, x_2, x_3, x_4) в произвольной системе координат. Вместо твердого тела — *моллюск отсчета*, как говорил Эйнштейн (моллюск как нечто аморфное).

Метрика = гравитация

Естественно считать, что для бесконечно малых четырехмерных областей при подходящем выборе системы координат справедлива специальная теория относительности. Т. е. в ней даны линейки небольших размеров и часы, измеряющие (x_1, x_2, x_3, x_4); с помощью них измеряется интервал между бесконечно близкими событиями внутри бесконечно малой области.

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^3 - dx_4^2.$$

И это инерциальная система, в ней нет гравитации, и частица движется равномерно по прямой.

Линейному элементу ds в некоторой выбранной системе координат соответствует

$$(dx_1, dx_2, dx_3, dx_4); \quad dx^\mu = a^\mu_\nu \, dx^\nu; \quad ds^2 = g_{\mu\nu} \, dx^\mu \, dx^\nu.$$

Специальная теория относительности предполагает частный случай: координаты можно выбрать так, что $\widetilde{g}_{\mu\nu} = (1, 1, 1, -1)$ всюду. В общем случае произвольного $g_{\mu\nu}$ такой выбор невозможен. $g_{\mu\nu}$ следует рассматривать как величины, описывающие гравитационное поле. Если $g_{\mu\nu}$ в некоторой области постоянны, то движение материальных частиц в этой системе координат равномерно и прямолинейно. Но и в других координатах ускорение и криволинейность не зависит от физической природы тела, т. е. движение можно истолковать как движение в гравитационном поле.

Итак, появление гравитационного поля связано с зависимостью $g_{\mu\nu}$ от пространственно-временных координат. Но и в общем случае, когда нельзя $g_{\mu\nu}$ привести к виду $(1, 1, 1, -1)$ в конечной области, мы предположим, что задание метрического тензора $g_{\mu\nu} \, dx^\mu \, dx^\nu$ эквивалентно определению гравитационного поля.

Уравнение геодезической (движение материальной точки)

Выведем уравнение геодезической из принципа наименьшего действия для функционала длины.

$$\delta\left\{\int\limits_{P_1}^{P_2} ds\right\} = 0, \quad x^\mu = x^\mu(\lambda); \quad \delta\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\,d\lambda = 0.$$

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda\left\{\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}}\frac{\partial x^\alpha}{d\lambda}\frac{\partial x^\beta}{d\lambda}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right\}\delta x^\nu = 0.$$

Замечание. Не забудьте, что варьировать нужно не только x^μ, но и $g_{\mu\nu}(x)$ по x^μ.

Выбрав $\lambda = s$ — натуральным параметром, т. е. таким параметром, что $g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 1$, получаем

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^{\alpha\beta}_{\mu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad \text{где} \quad \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right)$$

называются *символами Кристоффеля.* Очевидно, что геодезическая на каждом участке, размер которого меньше радиуса кривизны, является прямой. Это и есть ее определение. Поэтому *из принципа эквивалентности следует, что частица движется по геодезической.*

Ковариантное дифференцирование

В галилеевых координатах dA_μ — вектор, как и A_μ, а $\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ — тензор. По отношению к криволинейным координатам и произвольным преобразованиям координат это уже не так. И связано это с тем, что $dA_\mu = A_\mu(x+dx) - A_\mu(x)$ — разность векторов в различных точках. Каждый из членов разности преобразуются различно, так как в формулах $A^\mu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial \widetilde{x}^\nu}\widetilde{A}^\nu$ и $A_\mu = \dfrac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\mu}\widetilde{A}_\nu$ матрицы $\dfrac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}$ зависят от x.

Чтобы найти аналоги производных от тензоров, но преобразующиеся правильно, надо определить понятие *параллельного переноса* так, чтобы при преобразовании галилеевых координат компоненты вектора при переносе не менялись. Определим

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu \, dx^\lambda.$$

В галилеевой системе координат $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0$. Теперь $DA^\mu \stackrel{\text{def}}{=} dA^\mu - \delta A^\mu$ — вектор и

$$DA^\mu = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu\right) dx^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla_\lambda A^\mu)\, dx^\lambda.$$

Так как скаляры не меняются при параллельном переносе, то $\delta(A^\mu B_\mu) = 0$. Отсюда следует, что $\delta B_\mu = \Gamma^\nu_{\mu\lambda} B_\nu \, dx^\lambda$ и

$$DB_\mu = \left(\frac{\partial B_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} B_\nu\right) dx^\lambda = (\nabla_\lambda B_\mu)\, dx^\lambda,$$

∇_μ называется *ковариантной производной.*

Аналогично

$$\begin{gathered}
\nabla_\lambda A_{\mu\nu} = \partial_\lambda A_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} A_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} A_{\mu\alpha};\\
\nabla_\lambda A^\mu \ldots = (\partial_\lambda + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} + \ldots) A^\alpha \ldots\,;\\
\nabla_\lambda (A_\mu B_\nu) = (\nabla_\lambda A_\mu)\, B_\nu + A_\mu \nabla_\lambda B_\nu; \qquad \text{и т. д.}
\end{gathered}$$

Закон преобразования символов Кристоффеля выводится из тензорного характера преобразования ковариантной производной.

$\nabla_\mu A_\nu = \dfrac{\partial \widetilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\dfrac{\partial \widetilde{x}^\beta}{\partial x^\nu}\widetilde{\nabla}_\alpha \widetilde{A}_\beta$, отсюда

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \widetilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \widetilde{x}^\gamma}\frac{\partial \widetilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \widetilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \widetilde{x}^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \widetilde{x}^\rho}.$$

(Сравните с преобразованием A_μ — калибровочной связности.)

Отсюда видно, что $(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu})$ — тензор, который называют *тензором кручения*. Если существует система координат, где кручение равно 0, то оно везде будет равно 0 и $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$. Будем рассматривать в дальнейшем такие метрики, где кручение равно 0.

Локально геодезическая система координат

Пусть известно, что в точке (x^μ_0) символы Кристоффеля равны $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x_0) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu 0}$. Возьмем новые координаты вблизи x_0: $\widetilde{x}^\mu = x^\mu + \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\alpha\beta 0}x^\alpha x^\beta + \ldots$ Тогда $\widetilde{\Gamma}(x_0) = 0$. Так как $\dfrac{\partial\widetilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}(x_0) = \delta^\mu_\nu$, то эти преобразования не меняют тензоров в точке x_0, поэтому в ней одновременно можно привести $g_{\mu\nu}$ к галилееву виду. Такая система называется *локально геодезической*.

Связь $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ с $g_{\mu\nu}$ устанавливается из условия согласования параллельного переноса и операции поднятия индексов. Связность согласована с метрикой, если параллельный перенос сохраняет скалярное произведение. Из этого условия получаем, что

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right). \tag{14}$$

Такая метрика называется *римановой* (*псевдо-римановой*).

Тензор кривизны

При переносе по малому замкнутому контуру
$\Delta A_\mu = \oint \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu \, dx^\lambda \approx R^\nu_{\mu,\alpha\beta} A_\nu \Delta\sigma^{\alpha\beta}$, где

$$R^\nu_{\mu\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\nu_{\lambda\alpha}\Gamma^\lambda_{\mu\beta} - \Gamma^\nu_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}. \tag{15}$$

Величина $R^\nu_{\mu\alpha\beta}$ — это тензор, ибо ΔA_μ — разность в одной точке. Тензор $R^\nu_{\mu\alpha\beta}$ называется *тензором кривизны*. Если пространство плоское, $R^\nu_{\mu\alpha\beta} = 0$ и наоборот. Первая часть очевидна. Вторая следует из того, что в бесконечно малой окрестности точки можно взять галилеевскую систему, а из $R = 0$ следует возможность однозначного ее разнесения во все точки.

Свойства тензора кривизны

Тензор кривизны $R^{\nu}_{\mu\alpha\beta}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = -R^{\mu}_{\nu\beta\alpha}; \quad R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} + R^{\mu}_{\alpha\beta\nu} + R^{\mu}_{\beta\nu\alpha} = 0. \tag{16}$$

Задача. Проверьте соотношения (16).

Введем величину $R_{\mu\nu\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\lambda}R^{\lambda}_{\nu\alpha\beta}$. Из соотношений (14), (15), (16) после вычислений получаем, что

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\mu\partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{\nu\beta} - \partial_\nu\partial_\beta g_{\mu\alpha}\right) + \\ + g_{\rho\sigma}\left(\Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta} - \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta}\right), \tag{17}$$

отсюда следует равенство $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$.

Тензор кривизны $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ удовлетворяет тождеству Бьянки

$$\nabla_\gamma R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R^{\mu}_{\nu\beta\gamma} + \nabla_\beta R^{\mu}_{\nu\gamma\alpha} = 0.$$

Задача. Проверьте это.

Указание. Перейдите в систему, где $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$, которая является локально геодезической.

Определим величину $R_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta}R_{\mu\alpha\nu\beta} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$, которая называется *тензором Риччи*.

Из (14), (15), (16), (17) следует, что

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}, \quad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}.$$

Кроме того, $\nabla_\mu R^{\mu}_{\alpha} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial R}{\partial x^\alpha}$, где величина $R \stackrel{\text{def}}{=} g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ называется *скалярной кривизной*. Из-за свойств симметрии и тождества Бьянки следует, что тензор кривизны имеет 20 независимых компонент, а $R_{\mu\nu}$ имеет 10 независимых компонент, которые удовлетворяют дифференциальному тождеству

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\left(R_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}g_{\nu\lambda}R\right) = 0. \tag{18}$$

Уравнения Эйнштейна

Эйнштейн исходил из того, что уравнения на метрику $g_{\mu\nu}$ должны удовлетворять следующим условиям:

1) быть общековариантными;

2) плоское пространство ($R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$) должно быть их решением;

3) число уравнений должно быть равно числу независимых переменных $g_{\mu\nu} = 10$ (т. е. равно 10);

4) быть дифференциальными уравнениями второго порядка, переходящими в случае слабой гравитации в ньютоновские $\Delta\varphi = 0$.

Этим условиям удовлетворяют уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{или} \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right) = 0. \tag{19}$$

(В пустом пространстве они эквивалентны.)

Действительно, в слабом поле, т. е. когда $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, где $\eta_{\mu\nu}$ — метрика Минковского, $h_{\mu\nu} \ll 1$, уравнение движения частицы:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \sim -\frac{\partial h_{44}}{\partial x^i},$$

т. е. h_{44} играет роль ньютоновского потенциала и уравнения Эйнштейна преобразуются в

$$\Delta(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h) = 0, \quad \text{где} \quad h \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}.$$

Отсюда понятно, как модифицировать уравнение Эйнштейна в присутствии материи. Надо добавить в правую часть тензор второго ранга $T_{\mu\nu}$, такой, что в пределе T_{44} стремится к плотности энергии, равной плотности гравитационной массы. Это тензор энергии-импульса материи.

Поэтому уравнения примут вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}.$$

Теперь второй член в левой части необходим для согласованности уравнений, ибо теперь, вообще говоря, $R \neq 0$, а $g^{\mu\nu} \nabla_\mu T_{\nu\mu} = 0$.

Задача. Проверьте, что тем же свойством обладает левая часть, т. е. докажите тождество (18).

Задача. Проверьте, что в слабом поле получаются уравнения Ньютона.

Решение. Рассмотрим движение медленной материальной точки в слабом гравитационном поле

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

Если $v \ll c$ и гравитационное поле слабое, т. е. $g_{\mu\nu} \approx (1, 1, 1, -1)$ и не зависит от t, то, взяв за параметр s время t, получаем

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + c^2 \Gamma^i_{44} = 0; \quad x^4 = ct; \quad \Gamma^i_{44} = \Gamma_{i,44} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}.$$

Вспомним, что $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$, или

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}; \quad \text{где} \quad g_{44} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2}.$$

Уравнения Эйнштейна $R_{ik} = -k \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right)$, где $T_{\mu\nu} = \mu_0 u_\mu u_\nu$; $T_{44} = \mu_0 c^2$; $T = -\mu_0 c^2$ — тензор энергии-импульса, при $v \ll c$ примут вид

$$R_{44} = -\frac{1}{2} k \mu_0 c^2; \quad R_{44} \approx -\frac{\partial T^\alpha_{44}}{\partial x^\alpha};$$

$$\Gamma^\alpha_{44} \approx -\Gamma_{\alpha,44} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x^2_\alpha} = -\frac{\Delta \Phi}{c^2}.$$

Окончательно получаем, что $\Delta \Phi = \frac{1}{2} k c^2 \mu_0$. (См. ДНФ, § 39.)

Утверждение, что при малых массах и скоростях уравнения Эйнштейна переходят в уравнения Ньютона, называется *принципом соответствия*.

[Лекция 12]

Решение Шварцшильда

Найдем стационарное, сферически симметричное решение уравнений Эйнштейна — аналог ньютонова потенциала

$$\Phi_{\text{Н}} = -G\frac{M}{r}.$$

Запишем метрику в виде $d\rho^2 = c^2\,dt^2 g_{00} - g_{11}\,dr^2 - r^2\,d\Omega^2$; $g_{00} = e^{\nu}$; $g_{11} = e^{\lambda}$. Из стационарности и сферической симметрии следует, что $g_{00} = g_{00}(r)$, $g_{11} = g_{11}(r)$. Для коэффициентов в $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $R_{\mu\nu}$ имеем $x^0 = ct$; $x^1 = r$; $x^2 = \Theta$; $x^3 = \varphi$; $a' = \dfrac{\partial a}{\partial r}$; $\dot a = \dfrac{\partial a}{\partial t}$; и

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{11} = \lambda'/2; \quad \Gamma^0_{10} = \nu'/2; \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\Theta\cos\Theta; \\ \Gamma^0_{11} = \frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu}; \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}; \quad \Gamma^1_{00} = (\nu'/2)e^{\nu-\lambda}; \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = 1/r; \quad \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\Theta; \quad \Gamma^0_{00} = \dot\nu/2; \\ \Gamma^1_{10} = \dot\lambda/2; \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\Theta e^{-\lambda}\end{gathered}$$

(см. ДНФ, § 39).

Составляя уравнение $R_{\mu\nu} = 0$, получаем

$$\dot\lambda = 0; \quad e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0; \quad e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0,$$

откуда $\nu + \lambda = f(t)$. При замене $t \to t'(t)$, $\nu \to \widetilde{\nu} = \nu - \ln\left(\dfrac{dt'}{dt}\right)^2$ можно обратить $f(t)$ в 0. После чего получаем решение

$$g_{00} = 1 - r_g/r, \quad g_{11} = \frac{1}{1 - r_g/r},$$

где r_g — некая константа. При $r \to \infty$ $g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{r_g}{r}$, $\Phi = -\frac{r_g c^2}{2}\frac{1}{r}$. Сравнивая Φ с $\Phi_{\rm H} = -\frac{GM}{r}$, получаем $r_g = \frac{2GM}{c^2}$. Эту величину называют *гравитационным радиусом*. Простые вычисления дают r_g(Солнца) $= 3$ км, r_g(Земли) $= 0.44$ см.

Это решение корректно для $r > r_g$. При $r = r_g$ решение имеет сингулярность.

Движение перигелия Меркурия и искривление световых лучей

Уравнения движения материальной частицы

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = c^2, \tag{20}$$

и для движения света

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{21}$$

могут быть выведены из вариационного принципа $S = \int L\,d\lambda$, где $L = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$.

Для случая, когда $g_{\mu\nu}$ — метрика Шварцшильда, имеется два интеграла движения:

1) вследствие центральной симметрии сохраняется момент количества движения, т. е. плоскость движения ($\Theta = \pi$) и величина $M = r^2\frac{d\varphi}{d\tau}$;

2) вследствие стационарности сохраняется «энергия»: $\varepsilon = g_{00}\frac{dt}{d\tau}$ (в случае (21), $\tau = \lambda$).

Итак, имеем дополнительное условие

$$(1 - r_g/r)c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - r_g/r}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = qc^2$$

($q = 1$ для частицы с $m \neq 0$; $q = 0$ для света) и два интеграла движения: $(1 - r_g/r)c^2\frac{dt}{d\tau} = \varepsilon$ — энергия и $r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = M$ — момент.

Из них мы получаем

$$\frac{M^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \left(qc^2 + \frac{M^2}{r^2}\right)(1 - r_g/r)\,.$$

Сделав замену $r = \dfrac{1}{u}$, получаем

$$\begin{aligned} M^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{\varepsilon^2}{c^2} - (qc^2 + M^2u^2)(1 - r_gu) = \\ &= \left(\frac{\varepsilon^2}{c^2}\right) + qc^2r_gu - M^2u^2 + r_gM^2u^3 - qc^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Движение происходит в потенциальном поле.

Случай массивной частицы (q=1)

Продифференцировав (22), получаем

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \alpha(1 + \lambda u^2), \tag{23}$$

где $\alpha = \dfrac{c^2r_g}{2M^2} = \dfrac{Gm}{M^2}$, $\lambda = \dfrac{3M^2}{c^2}$ — малый параметр (напомним, что M — это момент частицы, а m — масса солнца).

В нулевом приближении $u = \alpha(1 - \varepsilon\cos\varphi)$. Если $\lambda = 0$, то u — периодическая функция φ, при $\lambda \ll 1$ период мало отличен от 2π и решение ищем в виде ряда Фурье. С точностью до первого порядка по λ имеем

$$\begin{aligned} u &= \alpha + \lambda\beta_0 - \alpha\cos\rho\varphi + \lambda\sum_{k=2}^{\infty}\beta_k\cos k\rho\varphi; \\ u'' &= \rho^2\left(a\varepsilon\cos\rho\varphi - \lambda\sum k^2\beta_k\cos k\rho\varphi\right); \\ \lambda u^2 &= \lambda\alpha^2\left(1 - 2\varepsilon\cos\rho\varphi + \varepsilon^2\cos^2\rho\varphi\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Уравнение (23) теперь можно переписать так:

$$\begin{aligned} \alpha + \lambda\beta_0 - \alpha\varepsilon(\rho^2 - 1)\cos\rho\varphi - \lambda\sum_k(k^2 - 1)\beta_k\cos k\rho\varphi_0 \simeq \\ \simeq \alpha\left(1 + \lambda\alpha^2\left(1 - 2\varepsilon\cos\rho\varphi + \varepsilon^2\cos^2\rho\varphi\right)\right). \end{aligned}$$

Приравнивая члены при $\cos\rho\beta$ и $\cos 2\rho\varphi$, получаем

$$\beta_0 = \alpha^3(1+\frac{\varepsilon^2}{2}); \quad 1-\rho^2 = 2\lambda\alpha^2; \quad -3\beta_2 = \alpha^3\frac{\varepsilon^2}{2}; \quad \rho \approx 1-\lambda\alpha^2.$$

Откуда угол между двумя перигелиями получается из формулы

$$\Phi = 2\pi(1+\lambda\alpha^2) = 2\pi + 6\pi\frac{G^2 m^2_{\text{солнца}}}{M^2 c^2}.$$

Для Меркурия эта поправка приводит к смещению на $43''$ в столетие. Это хорошо согласуется с опытом в пределах ошибок. Релятивистский эффект в поле $\frac{1}{r}$ в 6 раз меньше.

Случай света (q=0)

В этом случае, продифференцировав (22), получим

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2} - u^2 + r_g u^3, \tag{25}$$

где $\rho = \frac{M}{c\varepsilon}$ — прицельное расстояние. В нулевом приближении решения уравнения $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2} - u^2$ имеют вид $u = \frac{1}{\rho}\cos(\varphi-\varphi_0)$. Это уравнение прямой, проходящей на расстоянии ρ от Солнца. Угол между двумя нулями $u_0(\varphi)$, т.е. «асимптотами», равен π. Продифференцировав (25) по φ, получим

$$u'' + u = \frac{3}{2} r_g u^2.$$

Чтобы найти поправку, будем искать решение в виде $u = u_0 + r_g u_1 + \ldots$, тогда

$$u_0'' + u_0 = 0; \quad u_0 = A\cos\varphi, \quad (A = \frac{1}{\rho});$$

$$u_1'' + u_1 = \frac{3}{2}u_0^2 = \frac{3}{2}A^2\cos^2\varphi, \quad r_g \text{ — малый параметр.}$$

Получаем решение $u_1 = \frac{3}{4}A^2 - \frac{1}{4}A^2\cos 2\varphi + B\cos\varphi + C\sin\varphi$. Из условия $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\rho} - u^2 + r_g u^3$ следует, что $A = \frac{1}{\rho}$; $B = 0$, C определяет произвол в начале отсчета φ, поэтому положим $C = 0$.

Направление на бесконечности φ_∞ определяется условием

$$u(\varphi_\infty) = u_0(\varphi_\infty) + r_g u_1(\varphi_\infty) = 0;$$
$$A\cos\varphi_\infty + r_g\left(\frac{3}{4}A^2 - \frac{1}{4}A^2\cos 2\varphi_\infty\right) = 0;$$
$$\varphi_\infty = \frac{\pi}{2} + r_g A.$$

Таким образом, отклонение луча

$$\Delta\varphi = 2(\varphi_\infty - \varphi_0) = 2r_g A = \frac{2r_g}{\rho},$$

что хорошо согласуется с экспериментальными данными по отклонению видимого положения звезд вблизи Солнца, наблюдаемого при полных солнечных затмениях.

Изотропные модели Фридмана

Распределение вещества во Вселенной однородно и изотропно. Это подтверждается современными астрономическими наблюдениями. Естественно предположить, что и метрика также однородна и изотропна. В этом случае скалярная кривизна λ трехмерной метрики γ_{jk} постоянна (мы считаем, что $ds^2 = c^2\,dt^2 - \gamma_{ik}\,dx^i\,dx^k$).

Возможны три случая:

1) $\lambda > 0$ — пространство постоянной положительной кривизны. Примером является сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$.

2) $\lambda < 0$ — пространство постоянной отрицательной кривизны, пространство Лобачевского.

3) $\lambda = 0$ — плоское евклидово пространство.

Случай 1. Метрика пространства совпадает с метрикой трехмерной сферы радиуса R, $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, y) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y^2 = R^2\}$: $dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dy^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$. Кривизна $\lambda = \frac{1}{R}$, где R — радиус сферы или радиус кривизны. Введем в пространстве (x_1, x_2, x_3) сферические координаты R, θ, φ. Тогда

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2\left(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2\right).$$

В этих координатах длина окружности равна $2\pi r$, а радиус этой окружности равен $\int \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} = R \arcsin\frac{r}{R} = R\chi$, где χ — новая координата и $r = R\sin\chi$.

Новые координаты χ, θ, φ — это сферическая параметризация трехмерной сферы и метрика в них выражается как

$$dl^2 = R^2\left(d\chi^2 + \sin^2\chi\left(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right).$$

В этих координатах площадь сферы радиуса χ равна $4\pi R^2\sin^2\chi$, а объем всего пространства $V = 2\pi^2 R^3$ конечен.

Случай 2. При $\lambda < 0$ проще всего получить метрику, сделав замену $R \to iR$ в предыдущем случае. Тогда

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/R^2} + r^2\left(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2\right),$$

или после введения новой координаты такой, что $r = R\,\mathrm{sh}\,\chi$

$$dl^2 = R^2\left(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi\left(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2\right)\right).$$

Случай 3. $\lambda = 0$. Это привычное евклидово пространство с метрикой

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

или в сферических координатах r, θ, φ

$$dl^2 = dr^2 + r^2\left(\sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2\right).$$

Кардинальным шагом Фридмана (1922 г.) был отказ от стационарности Вселенной. Фридман предположил, что во всех случаях $R = R(t)$. Последующие наблюдения Хаббла (1925 – 1927 года) подтвердили это предположение.

При исследовании метрики удобна сопутствующая система, в которой данная частица вещества (галактика) покоится. Выберем время t так, чтобы $ds^2 = c^2\,dt^2 - dl^2$. Это означает, что t — собственное время частицы.

Случай 1. Закрытая модель. $\lambda > 0$

При нашем выборе метрика равна

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - R^2(t)\left(d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\right).$$

Введем новую координату η так, чтобы $c\,dt = R(\eta)\,d\eta$. Тогда

$$ds^2 = R^2(\eta)\left(d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\right).$$

Выпишем компоненты метрического тензора, символы Кристоффеля и компоненты тензора Риччи.

$$\begin{aligned} g_{00} &= R^2(\eta), & g_{11} &= -R^2(\eta), \\ g_{22} &= -R^2(\eta)\sin^2\chi, & g_{33} &= -R^2(\eta)\sin^2\chi\sin^2\theta; \end{aligned}$$

$$\Gamma^0_0 = \frac{R'(\eta)}{R(\eta)}, \quad \Gamma^0_{ik} = \frac{R'(\eta)}{R^3(\eta)}g_{ik}, \quad \Gamma^i_{0k} = \frac{R'(\eta)}{R(\eta)}\delta^i_k, \quad \Gamma^0_{0i} = \Gamma^i_{00} = 0.$$

Здесь штрих означает производную по η $\left(R'(\eta) = \dfrac{dR}{d\eta}\right)$. Единственная ненулевая величина R^0_0 равна $R^0_0 = -\dfrac{3}{R^4(\eta)}((R'(\eta))^2 - R(\eta)R''(\eta))$, а скалярная кривизна равна

$$R = -\frac{6}{R^3(\eta)}(R(\eta) + R''(\eta)).$$

Тогда

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{3}{R^4(\eta)}(R^2(\eta) + (R'(\eta))^2).$$

Обозначим ту же компоненту тензора энергии-импульса T_0^0 через $\varepsilon(\eta)$.

Уравнение Эйнштейна превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{3}{R^4(\eta)}\left(R^2(\eta)+\left(R'(\eta)\right)^2\right)=\frac{8\pi}{c^4}\gamma\varepsilon(\eta). \tag{26}$$

Сделаем предположение, что взаимодействием вещества можно пренебречь, т. е. давление $p=0$ и $\varepsilon(\eta)=c^2\mu(\eta)$, где $\mu(\eta)$ — плотность материи (массы). Эта модель называется *пылевидной материей.* Кроме того, можно считать, что общая масса вещества во Вселенной

$$M=2\pi^2R^3(\eta)\mu(\eta)=\mathrm{const},\qquad \text{или}\qquad \mu(\eta)=\frac{M}{2\pi^2R^3(\eta)}.$$

Эти предположения называются уравнениями состояния. Подставляя их в уравнение (26), получаем

$$\frac{3}{R(\eta)}\left(R^2(\eta)+\left(R'(\eta)\right)^2\right)=\frac{4M\gamma}{\pi c^2},$$
$$\int\frac{dR}{\sqrt{\dfrac{4\gamma M}{3\pi c^2}R-R^2}}=\pm\eta+\mathrm{const}\,.$$

Выделяя полный квадрат и обозначая $\dfrac{2\gamma M}{3\pi c^2}=R_0$, получаем

$$\arcsin\left(\frac{R}{R_0}-1\right)=\pm\eta+\mathrm{const}\,.$$

Стандартный выбор знака и константы интегрирования приводит к окончательному результату

$$R(\eta)=R_0(1-\cos\eta).$$

Чтобы найти t, подставим полученное выражение в уравнение $c\,dt=R(\eta)\,d\eta$, тогда

$$t=\frac{R_0}{c}\int(1-\cos\eta)\,d\eta=\frac{R_0}{c}(\eta-\sin\eta).$$

Окончательный ответ

$$\begin{cases} R = R_0(1-\cos\eta), \\ t = \dfrac{R_0}{c}(\eta - \sin\eta), \\ R_0 = \dfrac{2\gamma M}{3\pi c^2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что радиус Вселенной $R(t)$ изменяется по циклоиде, возрастая от 0 при $t=0$ до максимального значения $R=2R_0$ при $t=\dfrac{\pi R_0}{c}$, а затем убывая до 0 при $t=\dfrac{2\pi R_0}{c}$.

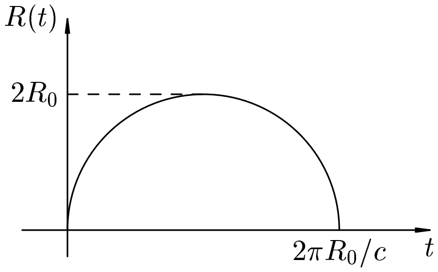


Рис. 6.

Учет давления не меняет факта сингулярности.

Случай 2. Открытая модель. $\boldsymbol{\lambda}<0$

Как и в закрытой модели, при нашем выборе метрика равна

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - R^2(t)\left(d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\right).$$

Так же, как и в закрытой модели, вводим новую координату η такую, что $c\,dt = R(\eta)\,d\eta$. После аналогичных вычислений компонент метрического тензора, символов Кристоффеля и компонент тензора Риччи, уравнение Эйнштейна превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{3}{R^4(\eta)}\left(\left(R'(\eta)\right)^2 - R^2(\eta)\right) = \frac{8\pi}{c^4}\gamma\varepsilon(\eta).$$

Решая его в модели пылевидной материи и предполагая, как и в закрытой модели, что $2\pi\mu(\eta)R^3(\eta) = M = \text{const}$, получаем

$$\begin{cases} R = & R_0(\operatorname{ch}\eta - 1), \\ t = & \dfrac{R_0}{c}(\operatorname{sh}\eta - \eta), \\ R_0 = & \dfrac{2\gamma M}{3\pi c^2}. \end{cases}$$

Задача. Проделайте эти вычисления.

Задача. Проделайте подобные вычисления в случае плоской модели ($\lambda = 0$).

Интересно, что во всех трех моделях в точке сингулярности $t \sim 0$ радиус Вселенной ведет себя одинаково: $R(t) \sim t^{2/3}$.

(ЛЛ2, Гл. 10 – 12, § 81 – 88, 91 – 103, с. 288 – 324, 330 – 407; ДНФ, ч. I, § 39, с. 372 – 386; ч. II, § 31, с. 705 – 731.)

Семинары по курсу «Теоретическая физика»

[5-й семестр]

А. А. Кадейшвили, А. Г. Кулаков

Приводится набор тем и задач, которые разбирались на семинарских занятиях. Кроме того, на семинарах разбирались задачи, данные на лекциях.

Семинар 1

Темы:

1) Системы отсчета.

2) Линейка с часами, часы синхронизированы.

3) Измерение длины и времени.

4) Постоянство скорости света в инерциальной системе отсчета.

5) Как следствие, преобразование Лоренца.

6) Измерение скорости и ускорения.

7) 4-скорость, 4-ускорение.

Задача 1. Две системы отсчета движутся со скоростями v_1, v_2 относительно третьей системы отсчета. Найдите их относительную скорость.

Задача 2. Наблюдатель движется с постоянным ускорением относительно собственной системы отсчета. Опишите движение наблюдателя в инерциальной системе отсчета. Примечание: концы линейки неподвижны друг относительно друга. Поэтому в мгновенно сопутствующей системе отсчета линейка покоится и совпадает с осью x.

Задача 3. Докажите, что 4-ускорение $\dfrac{dv^\alpha}{dt}$ имеет лишь 3 независимые компоненты. Свяжите $\dfrac{dv^\alpha}{dt}$ с ускорением, измеряемым наблюдателем в своей системе отсчета.

Задача 4. Система S' движется со скоростью β относительно системы отсчета S. Под углом Θ' к β в системе S' выпущена пуля со скоростью v'. Чему равен угол в системе S?

Задача 5. Тахион имеет скорость u. Тахион излучается покоящимся источником, а принимается удаляющимся со скоростью v наблюдателем и посылается назад. В момент приема расстояние между ними L. Через какое время может быть получен тахионный ответ?

Задача 6. Выведите преобразования Лоренца из следующих предположений:

а) четырехмерные прямые переходят в четырехмерные,

б) конечные точки не могут переходить в бесконечные,

в) квадратичная форма $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ сохраняется.

Задача 7. Выведите формулы преобразования Лоренца из того факта, что при замене $ict = \tau$ квадратичная форма $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ переходит в $x^2 + y^2 + z^2 + \tau^2$.

Семинар 2

Тема: 4-скорость и ее применение.

Задача 1. Вычислите компоненты 4-скорости.

Ответ:

$$u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{ds}; \quad ds = \sqrt{dx_0^2 - dx_1^2} \overset{x_0=ct}{=} c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}};$$
$$u_\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\overline{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \tag{27}$$

Задача 2. Найдите модуль относительной скорости системы K_1 относительно системы K_2.

Задача 3. К-он налетает на протон. Перпендикулярно вылетает нейтрон и под углом — пион. При каких E_κ реакция возможна?

Ответ: $E_k \geqslant \dfrac{m_k^2 + m_p^2 + m_n^2 - 2m_k m_p - m_\pi^2}{2(m_p - m_n)}$ $(c = 1)$, пион летит со скоростью света.

Задача 4. Найдите мировую линию тела, которое в сопутствующей системе отсчета имеет постоянное ускорение.

Задача 5. Стержень длины l скользит со скоростью v мимо ямы ширины L. При каком соотношении между l, L, v стержень провалится в яму?

Семинар 3

Темы:

1) Лагранжиан.

2) Уравнения Эйлера – Лагранжа.

3) Гамильтонова запись канонических уравнений.

4) Действие в гамильтоновой форме.

Задача 1. Запишите лагранжиан, канонические импульсы и гамильтониан свободной частицы в сферических координатах.

Задача 2. То же самое для релятивистской частицы.

Задача 3. То же самое для регулятора Уатта.

Задача 4. Опишите движение заряженной релятивистской частицы в электромагнитном поле.

Задача 5. Найдите частоту колебания двух грузиков масс m_i, связанных пружиной жесткости k.

Задача 6. 2 шарика, связанные пружиной, с энергией W налетают на стенку. Отскок а) упругий, б) не упругий. Найдите $W_{\text{кин}}$, $W_{\text{колеб}}$ после отскока.

Задача 7. Определите движение симметричного волчка с закрепленной точкой.

Указание.

1) Положение тела задается тремя углами эйлера.

2) Движение тела задается угловой скоростью.

3) Лагранжиан.

4) Тензор инерции.

5) Момент импульса.

6) Законы сохранения.

Задача 8. Разберите случай тяжелого симметричного волчка с закрепленной нижней точкой.

Семинар 4

Темы:

1) Движение в постоянном и однородном магнитном поле.

2) Движение в Кулоновом поле.

3) Колебание струны.

Семинар 5

Темы:

1) Поле равномерно заряженного шара.

2) Поле плоскости.

3) Шар с полостью.

4) Проводник в электрическом поле.

5) Энергия электромагнитного поля.

Задача 1. Найдите распределение заряда на проводящей плоскости вблизи заряда q.

Задача 2. Проводящий шар находится в однородном электрическом поле. Найдите распределение заряда и поле, создаваемое шаром.

Задача 3. Бесконечный цилиндрический проводник помещен в однородное электрическое поле. Найдите распределение заряда на поверхности проводника.

Задача 4. Вычислите энергию равномерно заряженного шара.

Задача 5. Дано действие $S = -mc\int ds - \frac{e}{c}\int A_\mu\, dx^\mu$. Выведите из этого действия закон движения частицы.

Семинар 6

Темы:

1) Поле длинного провода.

2) Поле бесконечно длинного соленоида.

3) Поле длинного провода в движущейся системе отсчета.

4) Поля движущихся зарядов.

5) Преобразование для полей и потенциалов.

6) Потенциал Лиенара – Вихерта.

7) Магнитный диполь. Поле диполя.

Семинар 7

Задача 1. Осциллятор имеет массу m, заряд e, жесткость пружины k. Найдите изменение амплитуды, связанное с излучением энергии (считаем, что частота ω_0 не меняется).

Ответ: $\dot{x} = -\dfrac{2e^2\omega_0^2}{3m}x$.

Задача 2. Определите излучение диполя $\overline{d}$, вращающегося в плоскости с угловой скоростью Ω.

Задача 3. Определите энергию излучения осциллятора в поле падающей на него волны.

Семинар 8

Тема: монополь Дирака.

Семинар 9

Тема: монополь т'Хофта – Полякова.

Семинар 10

Тема: решение Шварцшильда уравнений Эйнштейна.

Семинар 11

Тема: модели Фридмана и связанные с ними задачи.

Задача 1. Какую часть вселенной видит наблюдатель в моделях Фридмана?

Задача 2. Какова связь константы Хаббла и кривизны в моделях Фридмана?

Ответ: $H = \dfrac{\dot{R}}{cR}$.

Семинар 12

Тема: карты Крускала в задаче Шварцшильда.

Возможные задачи для письменного экзамена

Задача 1*. Найдите преобразования $(x, y, z, t) \to (x', y', z', t')$, которые обладают следующими свойствами:

1) $(0, 0, 0, 0) \to (0, 0, 0, 0)$.
2) $(*, 0, 0, *) \to (*, 0, 0, *)$.
3) Пространственные прямые переходят в прямые, отличающиеся сдвигом.
4) Сохраняют равномерное, прямолинейное движение.
5) Световой конус переходит в себя.
6) Содержат подгруппу пространственных вращений.

Задача 2. Найдите закон преобразования антисимметричного тензора $F_{\mu\nu}$ при преобразовании Лоренца со скоростью $\vec{v} = (v_1, 0, 0, 0)$. Результат выразить для $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Выразить через них $F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

Задача 3. Сколько времени по земным часам займет путешествие до звезды и обратно, если расстояние до нее 1 световой год, а скорость ракеты $v = \sqrt{0.9999}\, c$? На сколько времени нужно брать еду? Во сколько раз больше топлива нужно потратить для разгона ракеты, чем в случае вывода ее на околоземную орбиту?

Задача 4. Найдите наибольшую энергию одной из получившихся при распаде $(M \to m_1 + m_2 + m_3)$ частиц.

Задача 5. Найдите траекторию заряженной частицы в постоянном электрическом поле.

Задача 6. Найдите траекторию заряженной частицы в постоянном магнитном поле.

Задача 7. Найдите траекторию заряженной частицы в постоянных электрическом и магнитном полях, параллельных друг другу.

Задача 8. Найдите выражение для лапласиана в сферических координатах.

Задача 9. Докажите тождества:

1) $\operatorname{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi \operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\operatorname{grad}\varphi;$

2) $\operatorname{rot}(\varphi\vec{A}) = \varphi \operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\times\operatorname{grad}\varphi;$

3) $\operatorname{div}[\vec{A}\vec{B}\,] = \vec{B}\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}\vec{B};$

4) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = -\Delta\vec{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}.$

Задача 10. Найдите электрическое поле, создаваемое равномерно распределенным зарядом q по кольцу радиуса r и точечным зарядом $-q$ в центре этого кольца, на оси кольца на расстоянии $x \gg r$.

Задача 11. Покажите, что $\vec{E}^2 - \vec{H}^2$ и $\vec{E}\vec{H}$ инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Задача 12. Частица М массы M и $P = p_M$ налетает на покоящуюся частицу м массы m и $P = 0$. Образуется частица μ. Найдите ее массу, импульс и скорость.

Задача 13. Найдите электрическое и магнитное поле заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью v.

Задача 14. Диполь $\vec{d}$ вращается со скоростью Ω в плоскости. Какую энергию он излучает?

Задача 15. Найдите тензор энергии-импульса, плотность энергии и поток энергии ЭМ поля.

Задача 16. Найдите поле в полости равномерно заряженного шара с шаровой полостью.

Пример письменного экзамена по курсу «Теоретическая физика», 5-й семестр

Вариант I

Теоретические вопросы

1. Выведите преобразования Лоренца из принципов Эйнштейна.

2. а) Калибровочная инвариантность в электродинамике. Калибровка Лоренца и калибровка Кулона.

б) Калибровочная инвариантность в теориях Янга – Миллса.

3. Электромагнитные волны в пустоте. Плотность энергии-импульса электромагнитных волн.

Задачи

1. Найдите наибольшую энергию уносимую одной из частиц при распаде частицы массы M на три частицы масс m_1, m_2, m_3.

2. Тележка катится по столу со скоростью β, по ней катится вторая тележка с относительной скоростью β, и т. д. n-я тележка катится по $(n-1)$-й относительной скоростью β. Найдите скорость n-й тележки относительно стола и ее предел при $n \to \infty$.

3. Заряженную частицу массы m и заряда e разгоняют до скорости v. В дипольном приближении найдите затраченную энергию.

4. Векторный потенциал бесконечного соосного с осью z соленоида имеет вне соленоида вид

$$A_x = -k\frac{y}{x^2+y^2}; \quad A_y = k\frac{x}{x^2+y^2}; \quad A_z = 0.$$

Напряженность магнитного поля вне соленоида равна 0. Найдите калибровочное преобразование, зануляющее A вне соленоида.

Вариант II

Теоретические вопросы

1. Выведите преобразования Лоренца из двух постулатов Эйнштейна (принципа относительности и принципа независимости скорости света).

2. Излучение электромагнитных волн. Формула для дипольного излучения.

3. Инстантоны.

Задачи

1. На покоящуюся частицу массы m_1 налетает частица массы m_2 и импульса p. Найдите массу, импульс и скорость образовавшейся частицы.

2. Заряд q равномерно распределен по окружности радиуса r. Найдите несколько (больше одного) членов разложения напряженности электрического поля E в точке, расположенной на оси окружности на расстоянии $l \gg r$ от центра окружности.

3. Определите энергию излучение диполя $\overline{d}$, вращающегося в плоскости с угловой скоростью Ω.

4. Заряженная частица вращается в плоскости $0xy$ с угловой скоростью ω в магнитном поле перпендикулярном плоскости с напряженностью $H = \dfrac{A}{r^n}$ $(r^2 = x^2 + y^2)$. Движение частицы возмущают в горизонтальной плоскости. Найдите частоту Ω радиальных колебаний относительно движения по первоначальной окружности.

6 семестр

Квантовая механика

Эпиграфы:

1. Н. Бор (1935) «Между существенно различными экспериментальными установками и процессами измерения, из которых одни допускают однозначное применение понятия пространственной локализации, а другие — законное применение теоремы о сохранении количества движения, существует отношение дополнительности: с каждой постановкой опыта связан отказ от одной из двух сторон описания физических явлений; эти две стороны будут здесь как бы дополнительными одна к другой, тогда как их сочетание характеризует методы классической физики.»

2. Н. Бор (1928) «Здесь мы имеем дело не с противоречащими, а с дополнительными толкованиями явлений, которые лишь вместе дают естественное обобщение классического способа описания.»

3. Ю. И. Манин (1979) [М].

4. В. И. Арнольд (1995) «Взаимодействие математики и физики идет подчас странными путями. Дирак, один из крупнейших физиков 20 века, так сформулировал стратегию теоретической физики: «Приступая к созданию физической теории, необходимо отбросить все предшествующие физические модели, а также основанную на них «физическую интуицию», которая есть не что иное, как набор предвзятых точек зрения». Надо, говорит Дирак, просто выбрать красивую математическую теорию и последовательно находить физические интерпретации ее следствиям, не боясь противоречия с предшествующими теориями … Как это ни удивительно, весь опыт теоретической физики 20 века (в отличии от физики 19 века) подтверждает правоту Дирака.» ([Арн2], лекция 8.)

Введение

Во введении хотелось бы сделать несколько замечаний, обращенных к математикам.

1. Напомним слова, сказанные в начале предыдущего семестра о том, что это курс теоретической физики, основная задача которого рассказать, как придумываются уравнения или откуда они берутся, и который отличается от курса математической физики, где эти уравнения решаются.

2. Квантовая механика, как, впрочем, и теория относительности, — удивительный пример того, как физики в нашем веке, казалось бы, из «ничего» создали новые системы мира и создают их по сей день. Здесь уместно процитировать Лапласа «Счастливец Ньютон, ведь систему мира можно создать однажды» (это высказывание все время цитирует А. Смилга в своей книге «Очевидное — невероятное», давшей название популярной телепередаче).

3. С другой стороны, изложение любой физической теории невозможно без решения ее уравнений, что в нашей классификации является математической физикой. Уравнения необходимо решать хотя бы для того, чтобы сверить теорию с экспериментом. Но, главное, чтобы выработать определенную интуицию, с помощью которой в дальнейшем «по аналогии» (а этот эвристический метод — главный и основной метод теоретической физики), следуя математическим теориям, создавать новую физику (см. эпиграф 4).

4. Второй из авторов, учась на мехмате, серьезно считал, и думаю, что Вы сейчас также считаете, что излагать квантовую механику математикам нужно как аксиоматическую систему. Такой подход, с точки зрения второго из авторов, предельно последовательно осуществлен в [ФЯ] (см. также [ФН]).

5. Очень хотелось бы, чтобы читая эти лекции, Вы в каждый момент отдавали себе ясный отчет, какое из двух типов изложения физики сейчас перед Вами. И если Вам не нравится нечеткость формулировки какой-нибудь из теорем, то сформулируйте ее сами. Этот и многие другие способы, которыми математик

может изучать физику, замечательно описаны в [М]. Книга эта, сильно повлиявшая на второго из авторов, буквально посвящена тому, «как математик должен изучать физику». Ее можно цитировать в этих лекциях буквально с любого места.

Так же замечательным, по мнению второго из авторов, является учебник [ФЛС]. В нем очень подробно разбирается эксперимент по дифракции электронов на двух щелях из Лекции 13.

[Лекция 13]

Неудовлетворительность классических представлений

Классические механика и электродинамика при попытке применить их к объяснению атомных явлений приводят к результатам, противоречащим экспериментальным фактам.

Приведем важнейшие примеры в хронологическом порядке.

Пример 1. Планк — излучение черного тела (1900).

Имеется черный ящик (черный = не отражающий света, который на него падает). Стенки ящика нагреты до некоторой температуры и излучают внутрь. Термодинамическое равновесие между излучением и стенками. Энергия $\sim (E^2+H^2)$.

Задача. Посчитайте число гармоник в интервале $(\nu, \nu+d\nu)$, где ν — частота.

Ответ: $dN = \dfrac{8\pi}{c^3}\nu^2\,d\nu$.

По классическим представлениям средняя энергия одного осциллятора не зависит от частоты и равна $e(\nu)=kT$. Тогда $dE = \dfrac{8\pi}{c^3}\nu^2 kT\,d\nu$, отсюда $\int dE = \infty$. Это «теоретическое» явление получило название *ультрафиолетовой катастрофы.*

Планк предположил, что свет излучается порциями (квантами) и одна порция равна $h\nu$. Возможные состояния энергии частоты ν равны $E_n(\nu) = nh\nu$ (на самом деле $E_n = (n+1/2)h\nu$).

Задача. Выведите отсюда, что $e(\nu) = \dfrac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$ и $dE = \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}\times \dfrac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\,d\nu$.

Задача. Найдите частоту с максимальной энергией.

Напомним, что $h\nu = \hbar\omega$, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

Пример 2. Эйнштейн — фотоэффект (1905).

Было обнаружено (Герц, Гальвахс, Ленард, Рентген, Милликен), что ультрафиолетовые и рентгеновские лучи выбивают электроны, которые приобретают кинетическую энергию, растущую с частотой излучения по закону

$$\begin{cases} 0, \ \nu < \nu_{\text{крит}} \\ h\nu - E_{\text{крит}}, \ \nu \geqslant \nu_{\text{крит},} \end{cases} \qquad \text{где } E_{\text{крит}} = h\nu_{\text{крит}}.$$

Эйнштейн предположил, что свет состоит из фотонов и энергия фотона с частотой ν равна $h\nu$. Энергия $E_{\text{крит}}$ — это энергия выхода электрона из вещества. Эта гипотеза полностью объясняет эксперимент.

Пример 3. Бор — атом (1912).

Линейчатые спектры излучения атомов (1912), открытие структуры атомов (Резерфорд, 1911), комбинационный принцип Ритца–Ридберга, серии излучения атома водорода: серия Лаймана, в которой $\nu_n = cR(1 - 1/n^2)$, серия Бальмера, в которой $\nu_n = cR(1/4 - 1/n^2)$ и другие (здесь $R = 109700\,\text{см}^{-1}$ — *постоянная Ридберга*) — эти открытия породили множество вопросов. Например, почему атом устойчив? Ведь вращаясь вокруг ядра, электрон испытывает ускорение, следовательно, должен излучать, следовательно, должен свалиться на ядро.

Бор предположил, что при следующем соотношении на орбиту электрона: $mv2\pi r = nh$ (или $mvr = n\hbar$) он не излучает. Говорят, что орбита электрона квантуется. Атом испускает фотон (излучает свет), когда электрон переходит с орбиты на орбиту, и частота излучения ν связана с энергией перехода $\Delta E = h\nu$.

Выводы из этой гипотезы замечательно согласованы с экспериментальными фактами.

Пример 4. Де Бройль — интерференция электронов на кристаллах (1926).

В экспериментах по облучению кристаллов электронами были обнаружены интерференционные полосы. Пучок электронов обнаружил волновые свойства.

Де Бройль предположил, что длина волны λ пучка электронов равна $\lambda = \dfrac{h}{p}$ и свет и электроны ведут себя иногда как волны, иногда как частицы. Как это совместить?

Интерференция электронов

Представим себе мысленный эксперимент: S излучает электроны, а детектор D регистрирует их. Они попадают по отдельности на экран B, как отдельные частицы. Мы измеряем вероятность P попадания за 1 с электронов в детектор на расстоянии x от оси (рис. 7, *а*).

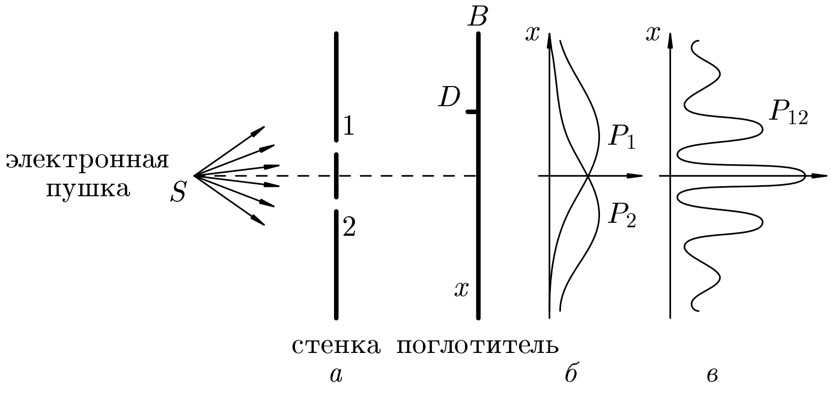


Рис. 7.

Поскольку электроны ведут себя как частицы, можно было бы предположить, что каждый проходит через одно из отверстий и в случае двух открытых отверстий вероятность попадания в точку x была бы суммой вероятностей $P_{\text{об}} = P_1 + P_2$ (см. рис. 7, *б*). Но опыт дает другую картинку — рис. 7, *в*. На самом деле $P(x)$ совпадает с распределением интенсивности при интерференции волн. Поэтому (по аналогии с интерференцией света) можно предположить, что существует амплитуда вероятности $\varphi(x)$ такая, что

$$P(x) = |\varphi(x)|^2, \quad \varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$
$$P_1(x) = |\varphi_1|^2, \quad P_2(x) = |\varphi_2|^2.$$

Мы вычисляем интенсивность волн, которые достигли бы прибора, а затем интерпретируем эту интенсивность как вероятность.

Как сказывается влияние наблюдения на этот эксперимент?

Попробуем определить, через какое отверстие проходит электрон, например, с помощью света. Свет рассеивается на электронах. Это явление называется *эффектом Комптона.*

В результате мы точно знаем, что электрон проходит либо через отверстие 1, либо через отверстие 2. В этом случае $P = P_1 + P_2$.

Но, используя свет, мы вносили возмущение в поведение электронов. Какова его интенсивность? Вспомним, что свет состоит из фотонов, каждый из которых имеет энергию $E = h\nu$ и импульс $p = h/\lambda$. Если мы зарегистрировали рассеянный на электроне фотон (и следовательно, узнали через какое отверстие прошел электрон), то фотон передал электрону импульс порядка h/λ и мы получили неопределенность такого же порядка в регистрации положения электрона. Ослабить влияние света на электрон можно увеличивая λ, но это приведет к уменьшению точности, с которой мы определяем, где проходит электрон. Неточности Δx и Δp в измерении координат и импульса электрона связаны поэтому соотношением неопределенности Гейзенберга $\Delta p \cdot \Delta x \geqslant \hbar$.

Парадокса в утверждении, что электрон — это *частица - волна* не возникает, если любое физическое вмешательство с целью определить, через какое отверстие проходит электрон, приводит к искажению опыта и интерференция исчезает.

В силу этого с каждой постановкой опыта связан отказ от одной из двух сторон описания физического явления. Эти две стороны являются *дополнительными* одна к другой. Этот принцип называют *принципом дополнительности Бора.*

Применяя принцип неопределенности к атому водорода, можно оценить размер этого атома. Пусть a — размер атома водорода, $V(r)$ — потенциал кулонового взаимодействия, T — кинетическая энергия, тогда

$$V(a) = -\frac{e^2}{a}, \quad \Delta x = a, \quad \Delta p = \hbar/a,$$
$$p \sim \hbar/a, \quad T = \frac{\hbar^2}{2ma^2}, \quad E_{\text{полн}} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}.$$

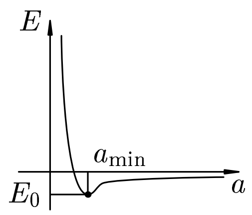


Рис. 8.

Получаем, что существует размер a, при котором $E_{\text{полн}}$ минимальна.

Задача. Выведите, что

$a_{\min} = \dfrac{\hbar^2}{me^2}$ — размер атома водорода в теории Бора,

$E_0 = -\dfrac{me^4}{2\hbar^2}$ — энергия атома водорода в основном состоянии.

Увеличивая число отверстий и экранов в эксперименте по интерференции электронов, мы приходим к идее Р. Фейнмана интеграла по путям в квантовой теории. Можно считать, что пространство в каждом месте состоит из таких «отверстий».

Разбирая подобные задачи и сравнивая их решения с экспериментальными данными, создатели квантовой механики (Гейзенберг, Шредингер, Дирак, Бор, Борн, Де Бройль и др.) пришли к открытию — состояние частицы является вектором, наблюдаемая — это линейный оператор, действующий на таких векторах, и мы можем определять только собственные значения этих операторов.

[Лекция 14]

Математика квантовой механики

В классической механике полное описание состояния физической системы осуществляется заданием всех ее координат и скоростей. По этим начальным данным уравнения движения полностью определяют поведение системы во все будущие моменты времени. В квантовой механике такое описание невозможно, поскольку координаты и соответствующие им скорости не измеримы одновременно. Описание состояния квантовой системы определяется меньшим числом величин, чем в классической механике, т. е. является менее подробным, чем классическое.

Определение. Наборы физических величин, обладающие тем свойством, что эти величины измеримы одновременно, причем если они имеют одновременно определенные значения, то уже никакая другая физическая величина (не являющаяся функцией от них) не может иметь в этом состоянии определенного значения, будем называть *полными наборами*.

Дадим набор основных принципов квантовой теории.

(1) *Состояние* квантовомеханической системы будем понимать как вектор в некотором (гильбертовом) пространстве. Обозначение: $|A\rangle$. Обычно это пространство функций.

Пусть в состоянии $|A\rangle$ некоторое измерение приводит с достоверностью к результату 1, а в состоянии $|B\rangle$ — к результату 2. Тогда принимается, что всякая линейная комбинация $|\alpha A + \beta B\rangle$ описывает состояние, в котором то же измерение даст либо результат 1, либо результат 2. Иначе можно сказать, что некоторое состояние может быть рассмотрено как суперпозиция других состояний. (Пример — прохождение электрона через одну щель и через другую щель в описанном выше опыте.) Т. е. суперпозиция — это линейная комбинация.

Эти утверждения составляют содержание *принципа суперпозиции* — основного *положительного* принципа квантовой механики.

(2) Наблюдаемые, или физические величины, будут линейными

операторами в упомянутом гильбертовом пространстве. (Операторы будут обозначаться буквами со шляпкой — $\widehat{f}$, а иногда и без шляпки, когда понятно, что f — оператор). Возможны состояния, значения физической величины в которых фиксированы: такими состояниями будут собственные векторы оператора. В других состояниях физическая величина не может иметь определенного значения.

(3) В пространстве введена *эрмитова метрика*. Считаем, что наблюдаемым отвечают самосопряженные операторы. Собственные значения такого оператора (значения наблюдаемой) вещественны. (Формально можно рассматривать также и комплексные физические величины.)

(4) Полный набор наблюдаемых соответствует такому набору коммутирующих между собой операторов, что набор их собственных значений полностью задает вектор пространства.

Более точно — состояние определяется не вектором, а направлением. В наших рассуждениях будем считать векторы нормированными (там, где это возможно).

Пусть $|\psi\rangle$ не является собственным вектором для наблюдаемой $\widehat{Q}$. Пусть ψ_n — набор ее собственных векторов: $\widehat{Q}\psi_n = q_n\psi_n$. Собственные векторы эрмитова оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Поэтому можно рассмотреть состояние ψ как суперпозицию $\psi = \sum c_n\psi_n$. Квадрат модуля $|c_n|^2$ каждого из коэффициентов данного разложения определяет вероятность соответствующего значения q_n величины $\widehat{Q}$.

Введем понятие о *среднем значении* $\langle Q\rangle$ величины $\widehat{Q}$ в данном состоянии $|\psi\rangle$:

$$\langle Q\rangle = \sum q_n|c_n|^2 = (\psi, \widehat{Q}\psi),$$

где $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ обозначает эрмитово скалярное произведение в нашем пространстве.

Принцип детерминизма в квантовой механике

Зная в начальный момент времени $t = 0$ состояние $|\psi\rangle$ квантовой системы, мы должны уметь определять состояния $|\psi_t\rangle$, $t > 0$. Введем (линейный) оператор эволюции

$$|\psi_t\rangle = U(t, t_0)|\psi_0\rangle.$$

Поскольку мы считаем $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, оператор эволюции унитарен: $U^{+}U = \mathbb{1}$.

Пусть в начальный момент времени t_a известна координата частицы x_a. (Будем обозначать символом $|x\rangle$ состояние с известной координатой, равной x.) $|\psi_t\rangle$ — состояние в некоторый последующий момент времени t. Представим его как суперпозицию всех возможных состояний с известными координатами:

$$|\psi_t\rangle = \int \left(\mathcal{K}(t_b, x_b; t_a, x_a)|x\rangle\right)\, dx,$$

где $\mathcal{K}(t_2, x_2; t_1, x_1)$ — амплитуда распространения от положения $|x_1\rangle$ в момент времени t_1 до положения $|x_2\rangle$ в момент времени t_2. Ее называют *фейнмановским пропагатором*. Заметьте, что в аргументах некоторых величин время возрастает справа налево.

Динамический принцип

Динамический принцип квантовой механики заключается в том, что амплитуда перехода из $|x_0\rangle$ в $|x\rangle$ за время t получается суммированием по всем возможным траекториям, $x(\tau)$, ведущим из $x_0 = x(t_0)$ в $x = x(t)$:

$$\mathcal{K}(t_b, x_b; t_a, x_a) = \sum_{\text{по всем траекториям}} \mathcal{A}(x(\tau)),$$

где $\mathcal{A}$ — фаза вклада траектории:

$$\mathcal{A}(x(\tau)) = N \exp\left(\frac{iS[x(\tau)]}{\hbar}\right),$$

а функционал действия

$$S[x(\tau]))=\int\limits_{t_a}^{t_b} L(x,\dot{x})\,d\tau,\quad x(t_a)=x_a,\quad x(t_b)=x_b.$$

Континуальной сумме в определении фейнмановского пропагатора можно придать некоторую математическую строгость. Именно, вместо того чтобы рассматривать все непрерывные траектории, разобьем временной отрезок $[t_a,t_b]$ на N равных частей длины $\varepsilon=(t_b-t_a)/N$: $t_a=t_0<t_1<\ldots<t_{N-1}<t_N=t_b$, и ограничимся кусочно-линейными траекториями. Каждая такая траектория определяется выбором узловых точек (t_1,x_1), (t_2,x_2), $\ldots$, (t_{N-1},x_{N-1}), где $x_1,\ldots,x_{N-1}$ — любые. Тогда

$$\mathcal{K}(t_b,x_b;t_a,x_a)\sim \\ \sim C\int dx_{N-1}\int dx_{N-2}\ldots\int dx_1\exp\left(\frac{iS[x(t_0,t_1,\ldots,t_N)]}{\hbar}\right).$$

Увеличивая количество точек разбиения (уменьшая ε), мы сможем получить более полное представление множества всех траекторий. Но невозможно достичь предела этого процесса, так как такого предела не существует. Необходимо определить нормировочный множитель C, который, на самом деле, зависит от ε. К сожалению, определение этого нормировочного множителя — весьма трудная задача и не известно, как это делать в общем случае.

Например, в случае лагранжиана вида $L=\dfrac{m\dot{x}^2}{2}-V(x,t)$ нормировочный множитель равен C^{-N}, где

$$C=\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2}.$$

$$\mathcal{K}(t_b,x_b;t_a,x_a)=\frac{1}{C}\int\int\ldots\int e^{(i/\hbar)S[a,b]}\,\frac{dx_1}{C}\frac{dx_2}{C}\ldots\frac{dx_{N-1}}{C},$$

где $S[a,b]=\int_{t_a}^{t_b}L(x,\dot{x},t)\,dt$ представляет собой однократный интеграл вдоль кусочно-линейной траектории.

Возможны неудобства, связанные с нашим определением суммы по траекториям. Тем не менее, идея сохраняет смысл, несмотря на недостатки отдельных построений.

Уравнение Шредингера

Пусть

$$\psi(x,t+\varepsilon)=\int\frac{1}{C}\ \exp\left(\frac{i\varepsilon}{\hbar}L\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)\psi(y,t)\,dy$$

(здесь y — координата на прямой в момент t). Применяя это к частице в потенциале $V(x)$, т. е. при $L=\dfrac{m\dot{x}^2}{2}-V(x)$, получим

$$\psi(x,t+\varepsilon)=\int\frac{1}{C}\ e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m(x-y)^2}{2\varepsilon}}\exp\left(\frac{-i\varepsilon V\left(\frac{(x+y)}{2}\right)}{\hbar}\right)\psi(y,t)\,dy.$$

Из-за быстрой осцилляции первой экспоненты y близко к x. Пусть $y=x+\eta$,

$$\psi(x,t+\varepsilon)=\int\frac{1}{C}\ e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\eta^2}{2\varepsilon}}e^{\frac{-i\varepsilon V(x+\eta/2)}{\hbar}}\psi(x+\eta,t)\,d\eta.$$

Основной вклад в интеграл вносят $\eta\sim\sqrt{\dfrac{\varepsilon\hbar}{m}}$. Функцию ψ нужно разложить в ряд и удержать лишь члены порядка ε, т. е. разложить до второго порядка по η. Получаем

$$\psi(x,t)+\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}=$$
$$=\frac{1}{C}\int e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\eta^2}{2\varepsilon}}\left(1-\frac{i\varepsilon V(x)}{\hbar}\right)\left(\psi(x,t)+\eta\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{2}\eta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\,d\eta.$$

Сравнение членов нулевого порядка дает $C=\left(\dfrac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2}$. В первом порядке по ε получаем

$$\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}\int\eta^2e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}}\,d\eta\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V\psi,$$

или

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi.$$

Окончательно

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \widehat{H}\psi, \quad \text{где} \quad \widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V. \tag{28}$$

Это уравнение называется *уравнением Шредингера* (Шредингер, 1925). Оно было получено Шредингером из общих соображений. Вывод уравнения (28), приведенный здесь, принадлежит Р. Фейнману (см. [ФХ]).

[Лекция 15]

Движение свободной частицы по прямой

Рассмотрим Лагранжиан $L = \dfrac{m\dot{x}^2}{2}$.

Амплитуда распространения

$$\mathcal{K}(x_2, t_2; x_1, t_1) = \int\limits_{x(t_1)=x_1,\ x(t_2)=x_2} Dx(t) e^{i\frac{S}{\hbar}}.$$

Пусть $x_0(t)$ — решение классического уравнения $\delta S = 0$ с начальными условиями $x_0(t_1) = x_1$, $x_0(t_2) = x_2$. В нашем случае имеем уравнение $m\ddot{x} = 0$, значит, $x_0(t)$ линейна, а постоянные интегрирования находятся из граничных условий $x_0(t) = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}t + \dfrac{x_1 t_2 - x_2 t_1}{t_2 - t_1}$. Представим $x(t) = x_0(t) + \eta(t)$. Элемент объема не меняется при сдвиге, значит, $Dx(t) = D\eta(t)$. Тогда для действия имеем:

$$S(x) = S(x_0) + S(\eta), \qquad \text{где} \qquad S(x_0) = \frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1},$$

$$S(\eta) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{\eta}^2}{2}\,dt, \qquad \text{при условии} \quad \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0.$$

Следовательно,

$$\mathcal{K}(x_2,t_2;x_1,t_1) = \exp\left(\frac{im(x_2-x_1)^2}{\hbar\,(t_2-t_1)}\right)\int e^{\frac{i}{\hbar}S(\eta)}\,D\eta = \\ = \exp\left(\frac{im(x_2-x_1)^2}{\hbar(t_2-t_1)}\right)\mathcal{A}(t_1,t_2).$$

Для того чтобы найти $\mathcal{A}(t_1,t_2)$, рассмотрим групповое соотношение, которому удовлетворяет оператор эволюции:

$$U(t_2,t_1) = U(t_2,t)U(t,t_1), \qquad t_1 < t_2.$$

Тогда

$$\mathcal{K}(x_2,t_2;x_1,t_1) = \int \mathcal{K}(x_2,t_2;x,t)\mathcal{K}(x,t;x_1,t_1)\,dx,\ \ t_1<t<t_2. \quad (29)$$

Вспоминая вид функции распространения и замечая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{i\pi}{\alpha}},$$

получаем такое уравнение:

$$\mathcal{A}(t_1,t)\mathcal{A}(t,t_2)\sqrt{\frac{2\pi i\hbar}{m}}\sqrt{\frac{(t_2-t)(t-t_1)}{t_2-t_1}} = \mathcal{A}(t_1,t_2). \quad (30)$$

Задача. Проделайте необходимые выкладки и убедиться, что множитель

$$\exp\left(\frac{im(x_2-x_1)^2}{\hbar(t_2-t_1)}\right)$$

сократится.

Указание. Задача сводится к выделению полного квадрата.

Положим $F(t_1,t_2) = \mathcal{A}(t_1,t_2)\sqrt{\dfrac{2\pi i\hbar(t_2-t_1)}{m}}$. Тогда уравнение (30) эквивалентно уравнению $F(t_1,t)F(t,t_2) = F(t_1,t_2)$, решения которого даются формулой

$$F(t_1,t_2) = \frac{f(t_2)}{f(t_1)},$$

где $f(t)$ — *нормировка.* Можно сделать замену и считать, что

$$\psi(t) \mapsto f(t)\psi(t), \quad U(t_2,t_1) \mapsto \frac{f(t_2)}{f(t_1)}U(t_2,t_1).$$

Тогда

$$\mathcal{K}(x_2,t_2;x_1,t_1) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_2-t_1)}}\exp\left(\frac{im(x_2-x_1)^2}{2\hbar(t_2-t_1)}\right),$$

т. е.

$$|\mathcal{K}(x_2,t_2;x_1,t_1)|^2 \sim \frac{1}{t_2-t_1}.$$

Следствие. Плотность вероятности того, что частица останется в точке x_1, обратно пропорциональна времени.

Уравнения движения

Мы знаем, что в классическом случае уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

что эквивалентно $\delta S = 0$.

Сделаем в выражении для амплитуды замену переменной интегрирования

$$X(t) \to X(t) + \eta(t), \quad \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0, \quad \eta \ll \hbar.$$

Здесь $X(t)$ — произвольная траектория, по которой идет интегрирование, а $\eta(t)$ — фиксированная «малая» траектория с соответствующими условиями. Поскольку мера $\mathcal{D}X(t)$ не меняется при сдвигах, мы получаем

$$\int \mathcal{D}X(t)e^{\frac{i}{\hbar}S[X]} = \int \mathcal{D}X(t)e^{\frac{i}{\hbar}S[X+\eta(t)]}, \quad \text{или}$$

$$\int \mathcal{D}X(t)e^{\frac{i}{\hbar}S[X]} = \\ = \int \mathcal{D}X(t)e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\eta(t)\,dt\right),$$

$$\int \mathcal{D}X(t)e^{\frac{i}{\hbar}S[X]} =$$
$$= \int \mathcal{D}X(t)e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}\left(1 + \frac{i}{\hbar}\int\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\eta(t)\,dt\right) + o\left(\left\|\frac{\eta}{\hbar}\right\|\right).$$

Следовательно, в первом порядке малости по $\left\|\frac{\eta}{\hbar}\right\|$ получаем

$$\int \mathcal{D}X(t)e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}\int\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\eta(t)\,dt = 0,$$

или, поменяв порядок интегрирования,

$$\int\left(\int \mathcal{D}X(t)e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right)\eta(t)\,dt.$$

В силу произвольности $\eta(t)$ окончательно имеем

$$\left\langle\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x}\right\rangle := \int \mathcal{D}X(t)\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x}\right)e^{\frac{i}{\hbar}S[x]} = 0.$$

Симметрии и интегралы движения

В классической механике с симметриями связана теорема Нётер.

Предположим, что функция Лагранжа $L(x,\dot{x},t)$ не меняется при таких заменах $x \to h(x,s)$ (s — параметр), что $h(x,0) = x$ и $h(x,s) \sim x + s\eta(x)$ при $s \ll 1$ (т. е. $\frac{\partial h}{\partial s}\big|_{s=0} = \eta$).

Тогда в классическом случае (для истинных траекторий) существует первый интеграл $I(x,\dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\eta(x)$ (см. Лекция 4 предыдущего семестра) и $\frac{d}{dt}I = 0$. Рассмотрим вариацию вида

$$x \to x + s(t)\eta(x);\quad S \to S(x + s(t)\eta(x)) = S(x) + \int \dot{S}(t)I(x)\,dt.$$

Тогда на классической траектории

$$\int \dot{S}(t)I(x)\,dt = \int S(t)\dot{I}(x)dt = 0, \quad \text{для} \quad S(t_1) = S(t_2) = 0,$$

откуда $\dot{I} = 0$.

В квантовом случае, как и в предыдущем пункте, верно, что

$$\frac{d}{dt}\langle I\rangle = 0, \quad \text{где } \langle I\rangle := \int \mathcal{D}x(t)\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\eta(x)\right)e^{\frac{i}{\hbar}S[x]} = 0.$$

Действительно, в квантовом случае вариацию $x \to x + s(t)\eta(x(t))$ можно рассматривать как замену переменной в фейнмановском интеграле. Как и в предыдущем пункте, получаем наше утверждение.

Следствие. Вариациям функционалов в классическом случае соответствует замена переменной интегрирования в фейнмановском интеграле.

Импульс

В классике, если частица свободная ($L(x,\dot{x}) = \dfrac{m\dot{x}^2}{2}$), то $L(x,\dot{x}) = L(x+\varepsilon,\dot{x})$ и импульс $p = m\dot{x} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ является первым интегралом. То же самое происходит в случае замкнутой системы нескольких частиц, если взаимодействие зависит только от $|x_i - x_j|$.

В квантовом случае

$$\psi(x,t) = \int \mathcal{D}x(\tau)e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}\psi(x,0).$$

Сделаем замену

$$x(\tau) \to x(\tau) + \eta(\tau), \quad \eta(0) = 0, \quad \eta(t) = \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\psi(x+\varepsilon,t) &= \int\limits_{x(t)=x+\varepsilon} \mathcal{D}x(\tau)e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}\psi(x,0)\\ &= \text{ после сделанной замены}\\ &= \int\limits_{x(t)=x} \mathcal{D}x(\tau)e^{\frac{i}{\hbar}S[x(\tau)+\eta(\tau)]}\psi(x,0)\end{aligned}$$

$$= \psi(x,t) + \frac{i\varepsilon}{\hbar}\int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar}S[x(\tau)]}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\psi(x,0) +$$
$$+ \int \mathcal{D}x(\tau)\left(\int\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\eta(\tau)\,d\tau\right) e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}\psi(x,0).$$

В силу квантовых уравнений движения последний член равен нулю и мы получаем

$$\psi(x+\varepsilon,t) = \psi(x,t) + \varepsilon\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} =$$
$$= \psi(x,t) + \frac{i\varepsilon}{\hbar}\int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar}S[x(\tau)]}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\psi(x,0).$$

Исходя из классической ситуации, естественно считать, что последнее слагаемое определяет оператор импульса

$$\widehat{p}\psi(x,t) := \int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{\hbar}S[x(\tau)]}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\psi(x,0).$$

Получаем, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar}\widehat{p}\psi, \quad \text{или} \quad \widehat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Мы получили замечательный факт

Импульс пропорционален генератору сдвига, т. е. генератору симметрии, при которой он сохраняется.

Собственные функции импульса

Рассмотрим задачу на собственные значения и вектора оператора импульса:

$$\widehat{p}\psi_p = p\psi_p, \quad \text{или} \quad \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi_p}{\partial x} = p\psi_p.$$

Следовательно, собственные функции $\psi_p = ce^{\dfrac{i}{\hbar}px}$ — плоские волны. Кроме того, длина волны $\lambda = \dfrac{h}{p}$, а вероятность найти частицу в любом месте $|\psi|^2 = c^2$ не зависит от x.

Нормировка функций $\psi_p = ce^{\frac{i}{\hbar}px}$ получается из соотношения

$$\int \psi_p^*(x)\psi_{p'}(x)\,dx = \delta(p-p').$$

Таким образом,

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{\hbar}px}.$$

Разложение произвольной волновой функции $\psi(x)$ по собственным функциям ее импульса, называемое *импульсным представлением*, — это просто разложение в интеграл Фурье

$$\psi(x,t) = \int c(p,t)\psi_p(x)\,dp, \quad \text{где} \quad c(p,t) = \int \psi(x,t)\psi_p^*(x)\,dx.$$

Коммутационные соотношения и соотношение неопределенности

Для операторов координаты $\widehat{x}$ и импульса $\widehat{p}$ выполнено следующее коммутационное соотношение: $[\widehat{x},\widehat{p}] = i\hbar$. Это означает, что импульс и координату нельзя измерить одновременно.

Определим *неопределенность в измерении* наблюдаемой q как среднеквадратичное отклонение наблюдаемой от своего среднего, т. е. как квадрат дисперсии: $\left\langle (\widehat{q} - \overline{\widehat{q}}\,)^2 \right\rangle$.

Дальше следует стандартное доказательство неравенства между квадратом скалярного произведения и квадратами длин двух векторов.

Пусть $\langle \widehat{x} \rangle = \langle \widehat{p}\, \rangle = 0$ (в общем случае то же самое). Рассмотрим

$$\langle (\alpha\widehat{x} + i\widehat{p})(\alpha\widehat{x} - i\widehat{p}) \rangle \geqslant 0,$$

где $H = \alpha\widehat{x} - i\widehat{p}$, $H^+ = \alpha\widehat{x} + i\widehat{p}$, H^+H — эрмитов и положителен. Действительно, $\|H\psi\|^2 = \langle \psi H^+ H\psi \rangle \geqslant 0$. Следовательно, $\alpha^2\langle \widehat{x}^2 \rangle + \alpha\hbar + \langle \widehat{p}^2 \rangle \geqslant 0$, откуда из условия на дискриминант получаем соотношение неопределенности $\langle \widehat{x}^2 \rangle \langle \widehat{p}^2 \rangle \geqslant \dfrac{\hbar^2}{4}$.

Минимизация соотношения неопределенности. Волновые пакеты

Из предыдущих рассмотрений следует, что минимум достигается при $\alpha = -\dfrac{\hbar}{2\langle\widehat{x}^2\rangle}$ (это корень последнего квадратного уравнения при нулевом дискриминанте). В этом случае получаем, что $\|H\psi\|^2 = 0$, $H\psi = 0$, т. е.

$$(\alpha\widehat{x} - i\widehat{p})\psi = 0, \quad \text{или} \qquad -\frac{\hbar}{2\langle\widehat{x}^2\rangle}x\psi = \hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \psi = Ne^{-\dfrac{x^2}{4\langle\widehat{x}^2\rangle}}.$$

Обозначим $\langle\widehat{x}^2\rangle = \dfrac{a^2}{2}$, тогда $\psi = Ne^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. При этом можно посчитать среднее значение операторов $\widehat{x}^2$ и $\widehat{p}^2$ в состоянии ψ. По определению получаем $\langle\widehat{x}^2\rangle = \langle\psi|\widehat{x}^2\psi\rangle = a^2/2$ и $\langle\widehat{p}^2\rangle = \langle\psi|\widehat{p}^2\psi\rangle = \dfrac{\hbar^2}{2a^2}$.

Задача. Проделайте эти вычисления. Чему равно N?

В случае $\overline{p} = p_0 \neq 0$ и $\overline{x} = x_0 \neq 0$ волновая функция удовлетворяет уравнению

$$i(\widehat{p} - p_0)\psi = -\frac{\hbar}{a^2}(x - x_0)\psi.$$

Задача. Решите это уравнение.

Ответ:

$$\psi = Ne^{\frac{ip_0(x-x_0)}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}.$$

Задача. Проверьте, что в полученном состоянии $\langle\widehat{x}\rangle = x_0$, а $\langle\widehat{p}\rangle = p_0$.

Движение волнового пакета

Пусть свободная частица находилась при $t = 0$ в состоянии

$$\psi = Ne^{\dfrac{ip_0(x-x_0)}{\hbar} - \dfrac{(x-x_0)^2}{2a^2}}.$$

Найдем, в какое состояние она перейдет через время t.

$$\psi(x,t) = \int K(x,t;y,0)\psi(y,0)\,dy =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar}} \frac{N}{\sqrt{t}} \int e^{\frac{im(x-y)^2}{2\hbar t}} e^{\frac{ip_0(y-x_0)}{\hbar} - \frac{(y-x_0)^2}{2a^2}} \, dy = \ldots$$

Задача 10. Проделайте вычисления.

[Лекция 16]

Другой способ понять движение волнового пакета — это разложить волновую функцию по плоским волнам:

$$\psi(x, 0) = \int c(p, 0) e^{\frac{ipx}{\hbar}} \, dp,$$

где величина $|c(p, 0)|^2$ равна вероятности иметь импульс p. Тогда из уравнения Шредингера в импульсном представлении

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} \psi$$

с начальным условием $\psi(p, 0) = c(p, 0)$ следует, что

$$c(p, t) = c(p, 0) e^{-i \frac{p^2 t}{2m\hbar}}, \quad \psi(x, t) = \int c(p, 0) e^{-i \frac{p^2 t}{2m\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \, dp.$$

Отсюда видно, что распределение по импульсам не меняется: $|c(p, 0)|^2 = |c(p, t)|^2$, а распределение по координатам расплывается, поскольку частица с большим импульсом уходит за время t дальше.

Задача. Решите уравнение Шредингера с начальным условием $\psi(x, 0)$.

Гамильтониан

Пусть лагранжиан $L(x, \dot{x})$ не зависит от времени явно (однородность по времени). Тогда

$$S[x(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t)) \, dt = \int\limits_{t_1+\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} L(x(t-\varepsilon), \dot{x}(t-\varepsilon)) \, dt.$$

Разложим последний интеграл по ε до членов первого порядка, в том числе, по верхнему и нижнему пределам:

$$S[x(t)] = S + \varepsilon\left(L(x(t),\dot{x}(t))\big|_{t_1}^{t_2} - \int\left[\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x}\right]\,dt\right) =$$
$$= S + \varepsilon\left(L(x(t),\dot{x}(t)) - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \varepsilon\left(\int \dot{x}\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]\,dt\right).$$

В классике отсюда следует, что гамильтониан $H \equiv \dot{x}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L$ является первым интегралом, т. е. сохраняется.

В квантовом случае

$$\psi(x,t) = \int \mathcal{D}x(\tau)e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}\psi(x,0).$$

Сделаем замену

$$x(\tau) \to x(\tau+\varepsilon), \quad x(t+\varepsilon) = x, \quad t = \tau+\varepsilon, \quad \tau = t-\varepsilon \quad \varepsilon \ll 1.$$

Тогда

$$\psi(x,t+\varepsilon) =$$
$$= \int\limits_{x(t+\varepsilon)=x} \mathcal{D}x(t)e^{\frac{i}{\hbar}S[x]}\psi(x,0) =$$
$$= \text{ после сделанной замены}$$
$$= \int\limits_{x(t+\varepsilon)=x} \mathcal{D}x(t)e^{\frac{i}{\hbar}\int_\varepsilon^{t+\varepsilon} L(x(t-\varepsilon),\dot{x}(t-\varepsilon))\,dt}\psi(x,0) =$$
$$= \int \mathcal{D}x(t)e^{\frac{i}{\hbar}\left[S+\varepsilon\left(L(x(t),\dot{x}(t)) - \int\left[\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{x}\right]\,dt\right)\right]}\psi(x,0) =$$
$$= \int \mathcal{D}x(t)e^{\frac{i}{\hbar}\left[S+\varepsilon\left(L(x(t),\dot{x}(t)) - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \varepsilon\left(\int \dot{x}\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\,dt\right)\right]}\psi(x,0) =$$
$$= \int \mathcal{D}x(t)e^{\frac{i}{\hbar}}[S]\left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar}\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L\right) - \right.$$

$$- \int \dot{x} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt \biggr) \psi(x,0) =$$

$$= \psi(x,t) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar}[S]} \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \psi(x,0) -$$

$$- \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\int \left(\mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar}[S]} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right) \dot{x}\, dt \right) \psi(x,0).$$

В силу квантовых уравнений движения последний член равен нулю, и мы получаем

$$\psi(x, t+\varepsilon) = \psi(x,t) + \varepsilon \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} =$$
$$= \psi(x,t) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar}[S]} \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \right) \psi(x,0).$$

Как в случае с импульсом, исходя из классической ситуации, естественно считать, что последнее слагаемое определяет оператор гамильтониана $\widehat{H}$

$$\widehat{H}\psi(x,t) := \int \mathcal{D}x(t) e^{\frac{i}{\hbar}[S]} \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \right) \psi(x,0).$$

Получаем, что

$$\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i\varepsilon}{\hbar} \widehat{H}\psi, \qquad \text{или} \qquad \widehat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

Итак, мы получили второй замечательный факт:

Гамильтониан пропорционален генератору симметрии, при которой он сохраняется.

Квантовые скобки Пуассона

Скобками Пуассона в классической теории называется

$$\{u, v\} := \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right).$$

Задача. Проверьте следующие свойства скобок Пуассона:

1) $\{u, v\} = -\{v, u\}$;

2) $\{u, \mathrm{const}\} = 0$;

3) $\{u_1 + u_2, v\} = \{u_1, v\} + \{u_2, v\}$;

4) $\{u, v_1 + v_2\} = \{u, v_1\} + \{u, v_2\}$;

5) $\{u_1 u_2, v\} = \{u_1, v\} u_2 + u_1 \{u_2, v\}$;

6) $\{u, v_1 v_2\} = \{u, v_1\} v_2 + v_1 \{u, v_2\}$;

7) $\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} = 0$.

Наблюдаемые в квантовой теории не коммутируют, поэтому попробуем найти условия на «квантовые» скобки Пуассона, считая, что в квантовой теории должны выполняться те же свойства. Рассмотрим выражение $\{u_1 u_2, v_1 v_2\}_\hbar$. Его можно вычислить двумя способами. Сравнивая результаты, получаем

$$\{u_1, v_1\}_\hbar (u_2 v_2 - v_2 u_2) = (u_1 v_1 - v_1 u_1) \{u_2, v_2\}_\hbar.$$

Поскольку все эти наблюдаемые независимы, естественно положить

$$i\hbar \{u, v\}_\hbar := uv - vu.$$

Представление Гейзенберга

Сравним два представления Шредингера

$$\begin{cases} \psi(t) = U(t)\psi_0, \\ i\hbar \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \qquad \psi(0) = \psi_0. \end{cases}$$

Последнее уравнение можно формально решить: $\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi_0$. Отсюда получаем, что оператор эволюции $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}, U^{-1}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}$. Пусть $\widehat{q}(t) = U(t)\widehat{q}\, U^{-1}(t)$, где наблюдаемая $\widehat{q}$ не зависит от времени. Тогда

$$i\hbar \frac{\partial \widehat{q}\,(t)}{\partial t} = \left[\widehat{H}(t), \widehat{q}\,(t)\right], \quad \text{или} \quad \frac{\partial \widehat{q}\,(t)}{\partial t} = \{\widehat{H}(t), \widehat{q}\,(t)\}_\hbar,$$

$$\text{где}\quad i\hbar\{\widehat{H}(t), \widehat{q}\,(t)\}_\hbar = [\widehat{H}(t), \widehat{q}\,(t)].$$

Следовательно, $\widehat{H}$ — оператор энергии. Мы получили, что при $\hbar \to 0$ квантовая теория переходит в классическую (уравнения движения по форме остаются теми же, а наблюдаемые начинают коммутировать между собой).

Стационарные состояния

Пусть в начальный момент ψ_0 — собственная функция гамильтониана ($\widehat{H}\psi_0 = E\psi_0$). Тогда $\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi_0$. При этом $|\psi|^2$ не зависит от времени. Такие состояния называют *стационарными*. E называют *уровнем энергии*. Если данному значению E соответствует не одна, а несколько собственных функций, то такой уровень называют *вырожденным*.

Основные свойства уравнения Шредингера

Из уравнения Шредингера не следует никаких ограничений на волновую функцию ψ. Обычно выдвигают следующие физические требования:

1) волновая функция однозначна и непрерывна во всем пространстве (даже при разрывности потенциала V);

2) в области, где $V = \infty$, $\psi \equiv 0$;

3) в области, где $V \neq \infty$, должны быть непрерывны и производные волновой функции.

Из требования (1) следует, что на границе области $\{V = \infty\}$ волновая функция должна быть непрерывна, но этого нельзя сказать об ее производных.

Задача. Докажите, что энергетические уровни системы больше минимального значения потенциала, т. е. $E_n > V_{\min}$.

Задача. Пусть V имеет вид, как на рис. 9. Докажите, что спектр отрицательных собственных значений энергии — дискретен, а положительных — непрерывен.

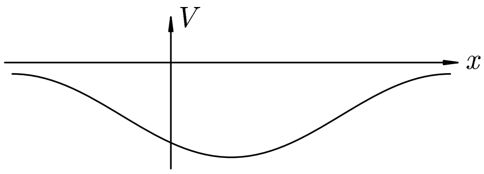


Рис. 9.

Задача. Приведите пример потенциала V, имеющего вид как на рис. 9, собственного значения $E_k < 0$ и волновой функции ψ_k, соответствующей этому собственному значению, таких, что

(а) $\int |\psi_k|^2\, dx < \infty$; (б) $\psi_k \neq 0$ в области, где $E_k < V$.

Задача. Пусть V в начале координат обращается в $-\infty$ по закону $V = -\dfrac{\alpha}{r^s}$ $(\alpha > 0)$, т. е. имеет вид, как на рис. 10. Докажите, что

(а) при $s > 2$ существуют отрицательные собственные значения энергии, сколь угодно большие по абсолютной величине;

(б) при $s < 2$ энергия не может принимать сколь угодно больших по абсолютной величине отрицательных значений.

Задача. Исследуйте характер отрицательного энергетического спектра потенциалов, как на рис. 10 $\left(V \approx -\dfrac{\alpha}{r^s}\right)$, в окрестности нуля.

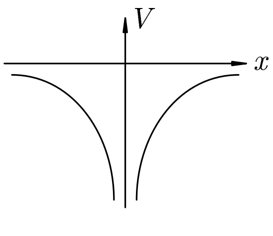


Рис. 10.

Указание. Рассмотрите поведение волновых функций на больших расстояниях.

(ЛЛЗ, Гл. 3, § 18, с. 73.)

Вариационный принцип

Задача. Проверьте, что уравнение Шредингера $H\psi = E\psi$ можно получить, как уравнение Эйлера – Лагранжа функционала $S[\psi, \psi^*] = \int \psi^*(H - E)\psi\, dx$.

Указание. По ψ и ψ^* можно независимо варьировать функционал $S[\psi, \psi^*]$.

Задача. Проверьте, что уравнение $H\psi = E\psi$ при условии $\int \psi\psi^*\, dx = 1$ можно получить, как уравнение Эйлера – Лагранжа в задаче на условный экстремум функционала $S_1[\psi, \psi^*] = \int \psi^* H\psi\, dx$ при условии $\int \psi\psi^*\, dx = 1$. При этом E можно рассматривать как множитель Лагранжа в этой задаче.

Предыдущие рассуждения являются основой для прямого вариационного метода. Сужение класса функций до явно заданного и зависящего от параметра превращает решение уравнения Шредингера в задачу на отыскание минимума функционала.

Задача. Пусть известны волновые функции ψ_0, ψ_1, ..., ψ_{n-1} первых n состояний, расположенных в порядке возрастания энергии. Докажите, что на волновой функции ψ следующего состояния достигается минимум функционала $\int \psi^* H\psi\, dx$, при условиях $\int \psi\psi^*\, dx = 1$ и $\int \psi^*\psi_k\, dx = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

(ЛЛ3, Гл. 3, § 20, с. 79.)

Одномерное движение

Задача. Пусть потенциальная энергия частицы зависит только от одной координаты: $V(x, y, z) = V(x)$. Проверьте, что тогда волновую функцию $\psi(x, y, z)$ можно искать в виде $\psi(x, y, z) = \psi_1(x)\psi_2(y, z)$, где $\psi_2(y, z)$ удовлетворяет уравнению Шредингера для свободной двумерной частицы, а $\psi_1(x)$ — одномерному уравнению Шредингера:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\psi_1 = 0.$$

Задача. Пусть потенциальная энергия частицы $V(x, y, z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$. Проверьте, что волновую функцию можно искать в виде $\psi(x,y,z)=\psi_1(x)+\psi_2(y)+\psi_3(z)$, где каждая из ψ_i удовлетворяет одномерному уравнению Шредингера

$$\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E-V_i(x)]\psi_i=0. \tag{31}$$

Покажем, что в одномерной задаче волновые функции финитных состояний имеют различные собственные значения (или, что то же самое, что «энергетические уровни дискретного спектра невырождены»).

Действительно, пусть есть два решения (31) ψ_1 и ψ_2 с одним значением E. Тогда

$$\frac{\psi_1''}{\psi_1}=-\frac{2m}{\hbar^2}[E-V(x)]=\frac{\psi_2''}{\psi_2}.$$

Следовательно, $\psi_1''\psi_2-\psi_1\psi_2''=0$. Интегрируя это уравнение, получаем $\psi_1'\psi_2-\psi_1\psi_2'=c$. Поскольку $\psi_1=\psi_2=0$ при $x\to\infty$, то константа $c=0$. Следовательно, $\psi_1'\psi_2-\psi_1\psi_2'=0$, и, еще раз интегрируя, получаем $\psi_1=c\psi_2$.

Одномерное движение, поведение на бесконечности

Пусть V имеет следующую форму, см. рис. 11.

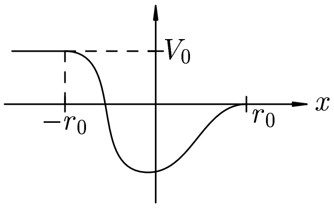


Рис. 11.

При таком потенциале волновые функции и их производные должны быть непрерывны. Кроме того, уравнение Шредингера

$$\psi''+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))\psi=0 \tag{32}$$

в области $|x| > r_0$ сводится к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \psi'' + \dfrac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\psi = 0, & x < -r_0, \\ \psi'' + \dfrac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0, & x > r_0. \end{cases} \tag{33}$$

Как всегда, нас интересуют либо квадратично интегрируемые решения, которые являются собственными функциями оператора H, либо решения, ограниченные на всей числовой оси, описывающие непрерывный спектр H.

(1) $E < 0$. Обозначим $a_1^2 = -\dfrac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$, $a_2^2 = -\dfrac{2m}{\hbar^2}E$, $a_i > 0$. Тогда уравнения (33) имеют решения:

$$\begin{array}{ll} \text{при } x < -r_0 & \psi = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{-a_1 x}, \\ \text{при } x > r_0 & \psi = c_1' e^{a_2 x} + c_2' e^{-a_2 x}. \end{array}$$

Квадратичная интегрируемость ψ при $x < -r_0$ означает, что $c_2 = 0$, т. е. при $x < -r_0$ $\psi = e^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{V_0 - E}\,x}$. Это же решение при $x > r_0$ является линейной комбинацией $c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{-a_1 x}$ и может быть квадратично интегрируемым только при $c_1 = 0$. Итак, мы стартуем с решения (32) $\psi = e^{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{V_0 - E}\,x}$ при $x < -r_0$; это решение переписываем при $x > r_0$ через фундаментальные решения $c_1 e^{\sqrt{-E}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-E}\,x}$ и приравниваем нулю c_1. Уравнение $c_1 = 0$ является, на самом деле, уравнением на E: $c_1(E) = 0$. Корни этого уравнения и задают дискретный спектр оператора H.

Задача. Проделайте предыдущую процедуру явно в случае потенциала рис. 12

$$V = \begin{cases} V_0, & x < 0, \\ V_1, & 0 \leqslant x < r_0, \\ 0, & x \geqslant r_0. \end{cases}$$

Найдите матрицу преобразования собственных функций (матрица монодромии) при переходе от V_0 к V_1, от V_1 к 0.

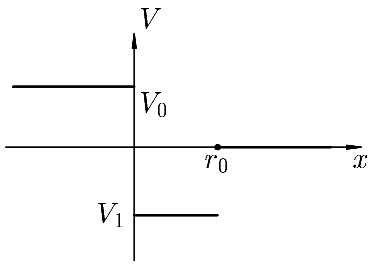


Рис. 12.

Решение. Обозначим $\dfrac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{V_0-E} = a$, $\dfrac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{E-V_1} = b$, $\dfrac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{-E} = c$. Общие решение уравнения Шредингера записываются

$$\begin{cases} c_1e^{ax}+c_2e^{-ax}, & \text{при } x<0, \qquad (34)\\ c_1'e^{ibx}+c_2'e^{-ibx}, & \text{при } 0\leqslant x<r_0, \qquad (35)\\ c_1''e^{cx}+c_2''e^{-cx}, & \text{при } x>r_0, \qquad (36)\end{cases}$$

1) Рассмотрим $\psi_1 = e^{ax}$. При переходе к (2) нужно записать условие непрерывности решения и производной в точке $x = 0$. Получаем систему

$$\begin{cases} c_{11}'+c_{21}'=1,\\ ibc_{11}'-ibc_{21}'=a,\end{cases}$$

из которой получаем первый столбец матрицы $M_{V_0}^{V_1}$:

$$M_{V_0}^{V_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a+ib}{2ib} & * \\ \dfrac{-a+ib}{2ib} & * \end{pmatrix}.$$

Второй столбец получается из первого формальной заменой $a \mapsto \mapsto -a$. Или

$$M_{V_0}^{V_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a+ib}{2ib} & \dfrac{-a+ib}{2ib} \\ \dfrac{-a+ib}{2ib} & \dfrac{a+ib}{2ib} \end{pmatrix}.$$

2) Аналогично рассмотрению предыдущего пункта, записывая условие непрерывности решения и производной в точке $x = r_0$, получаем линейные системы на коэффициенты матрицы $M^0_{V_0}$.

$$\textit{Ответ}: \quad M^0_{V_0} = \begin{pmatrix} e^{(-c+ib)r_0}\dfrac{c+ib}{2c} & e^{(-c-ib)r_0}\dfrac{c-ib}{2c} \\ e^{(c+ib)r_0}\dfrac{c-ib}{2c} & e^{(c-ib)r_0}\dfrac{c+ib}{2c} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что уравнение $c_1(E) = 0$ на дискретный спектр E эквивалентно

$$e^{ibr_0}(c+ib)(a+ib) + e^{-ibr_0}(c-ib)(-a+ib) = 0 \quad \text{или}$$

$$e^{2ibr_0} = \frac{(c-ib)}{(c+ib)}\frac{(a-ib)}{(a+ib)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{\dfrac{\sqrt{2m}}{\hbar}2i\sqrt{E-V_1}\,r_0} = \frac{(\sqrt{-E}-i\sqrt{E-V_1})(\sqrt{V_0-E}-i\sqrt{E-V_1})}{(\sqrt{-E}+i\sqrt{E-V_1})(\sqrt{V_0-E}+i\sqrt{E-V_1})}. \quad (37)$$

(2) $0 < E < V_0$.

Задача. Запишите общий вид решения уравнения Шредингера при $x < -r_0$ и при $x > r_0$.

Из решения задачи видно, что квадратично интегрируемых решений нет.

Задача. Найдите ограниченные решения в случае потенциала рис. 12 и $0 < E < V_0$. Проверьте, что оно единственно (с точностью до пропорциональности).

Задача. Докажите, что и в случае общего потенциала (рис. 11) при $0 < E < V_0$ спектр является простым непрерывным.

(3) $E > V_0$.

В этом случае уравнение Шредингера имеет и при $x < -r_0$, и при $x > r_0$ ограниченные решения $\psi_k = c_1 e^{ia_k x} + c_2 e^{-ia_k x}$. Поэтому любая волновая функция ограничена. Квадратично интегрируемых решений нет.

Следовательно, при $E > V_0$ оператор H имеет непрерывный двукратновырожденный спектр.

Потенциальная яма

Потенциальной ямой называется потенциал вида потенциала на рис. 13:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } x \geqslant r_0, \\ V_1, & \text{при } 0 \leqslant x < r_0. \end{cases}$$

Это частный случай потенциала на рис. 12 при $V_0 = 0$.

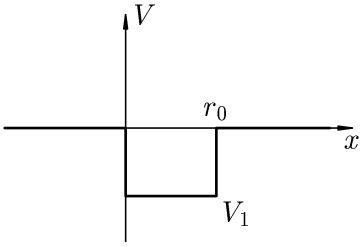


Рис. 13.

Уравнение на дискретный спектр оператора H такого потенциала (37) упрощается. В результате получаем

$$e^{i\sqrt{E-V_1}r_0\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}} = \frac{\sqrt{-E} - i\sqrt{E-V_1}}{\sqrt{-E} + i\sqrt{E-V_1}}. \tag{38}$$

Задача. Проверьте, что в случае потенциала

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{при } x < 0 \text{ или } x > r_0, \\ 0, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant r_0. \end{cases}$$

(потенциал с бесконечно высокими стенками) спектр полностью дискретный и имеет вид

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mr_0^2}n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Указание. Решите задачу с самого начала.

(ЛЛЗ, Гл. 3, § 22, с. 86.)

[Лекция 17]

Линейный осциллятор

Определение. Линейным или гармоническим осциллятором называют физическую систему с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m^2\omega^2x^2}{2}.$$

Спектр гармонического осциллятора

Заметим, что $\dfrac{H}{\hbar\omega} = \dfrac{p^2}{2m\hbar\omega} + \dfrac{m\omega x^2}{2\hbar}$ является безразмерной величиной. Введем следующие операторы, которые обычно называются операторами рождения и уничтожения частицы:

$$a^+ = \frac{p}{\sqrt{2\hbar m\omega}} + i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x.$$
$$a = \frac{p}{\sqrt{2\hbar m\omega}} - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x.$$

Если бы операторы p и x коммутировали, то $a \cdot a^+$ было бы разложением $\dfrac{H}{\hbar\omega}$ по формуле разности квадратов.

Задача. Проверьте следующие соотношения:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^+ + a^+a); \quad [a, a^+] = 1; \quad H = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right).$$

Определим еще один оператор $\widehat{n} = a^+a$.

Задача. Проверьте, что

$$\widehat{n}a^+ = a^+(\widehat{n} + 1),$$
$$\widehat{n}a = a(\widehat{n} - 1).$$

Рассмотрим собственную функцию (состояние) ψ_0 оператора a такую, что $a\psi_0 = 0$.

Задача. Проверьте (по индукции), что для $\psi_n := (a^+)^n\psi_0$ выполнено $\widehat{n}\psi_n = n\psi_n$.

Задача. Проверьте, что ψ_n — собственные функции гамильтониана H, т. е. $H\psi_n = E_n\psi_n$ и $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$.

Окончательно получаем

Теорема. Гармонический осциллятор обладает лишь дискретным спектром $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$, т. е. расстояния между двумя ближайшими уровнями одинаковы и равны $\hbar\omega$.

Собственные функции гармонического осциллятора

Чтобы найти собственные функции гармонического осциллятора, нужно решить уравнение $a\psi_0 = 0$, которое эквивалентно в координатном представлении (вспоминаем, что $\widehat{p} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{d}{dx}$, а $\widehat{x}$ — это умножение на x)

$$\frac{d}{dx}\psi_0 = -x\frac{m\omega}{\hbar}\psi_0, \tag{39}$$

откуда ψ_0 легко находится:

$$\psi_0 = c_0 e^{-\frac{x^2}{2b^2}}, \quad \text{где} \quad b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Из определения $\psi_n = (a^+)^n\psi_0$ получаем

$$\psi_n(x) = \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^n \left(b\frac{d}{dx} - \frac{x}{b}\right)^n \psi_0(x).$$

Естественно сделать замену $z = \dfrac{x}{b}$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_n(bz) &= \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{d}{dz} - z\right)^n \psi_0(bz), \quad \text{или} \\ \psi_n(bz) &= \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{d}{dz} - z\right)^n e^{-\frac{z^2}{2}}. \end{aligned} \tag{40}$$

Определение. Полиномы Эрмита $H_n(x)$ определяются из следующих соотношений:

$$\frac{d^n e^{-x^2/2}}{dx^n} = (-1)^n e^{-x^2/2} H_n(x).$$

Задача. Проверьте, что
1. $\int H_n(x)H_m(x)e^{-x^2/2}\,dx = 0$ при $n \neq m$;
2. $\int H_n^2(x)e^{-x^2/2}\,dx = n!\sqrt{2\pi}$;
3. $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \dfrac{d}{dx}H_n(x)$.

Задача. Докажите, что система $\{H_n(x)\}$ полна в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ с $\rho = e^{-x^2/2}$.

Задача. Ортогонализуйте в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ с $\rho = e^{-x^2/2}$ систему многочленов $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Определим теперь полиномы $P_n(z)$ соотношениями

$$\left(\frac{d}{dz} - z\right)^n e^{-z^2/2} = (-1)^n e^{-z^2/2} P_n(z)$$

Задача. Проверьте, что
1. $P_{n+1}(z) = 2zP_n(z) - \dfrac{d}{dz}P_n(z)$;
2. $P_n(z) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n H_n(\sqrt{2}z)$.

Задача. Выпишите явный вид нормированных собственных функций гармонического осциллятора ψ_n через полиномы Эрмита (ответ можно найти в любом учебнике по квантовой механике). Вычислите $\langle p\rangle_{\psi_n}$, $\langle p^2\rangle_{\psi_n}$, $\langle x\rangle_{\psi_n}$ и $\langle x^2\rangle_{\psi_n}$.

(ЛЛ3, Гл. 3, § 23.)

[Лекция 18]

Момент импульса

Пространство изотропно. Это означает, что все направления в нем должны быть эквивалентны. Поэтому гамильтониан замкнутой системы не меняется при поворотах. То есть $VH\psi = HV\psi$, где V — оператор поворота. Если это свойство выполняется для бесконечно малого поворота, то оно будет выполняться и для любого поворота. Найдем вид генератора бесконечно малого поворота.

Пусть $\delta\vec{\varphi}$ — вектор бесконечно малого поворота, направленный по оси поворота и равный по величине углу поворота. Тогда

$\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}]$. Это верно для радиус-вектора $\vec{r}_a$ любой частицы a. Получаем

$$\delta\psi = \psi(r_1 + \delta r_1, r_2 + \delta r_2, \dots) - \psi(r_1, r_2, \dots) = \\ = \sum_a \delta r_a \nabla_a \psi = \delta\vec{\varphi} \sum [\vec{r}_a, \vec{\nabla}_a]\psi.$$

Оператор $1 + \delta\varphi \sum [r_a, \nabla_a]$ и есть оператор бесконечно малого поворота.

Введем оператор $\vec{M} = \sum\limits_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a]$, где $p_a = \dfrac{\hbar}{i}\nabla_a$. Из условия $V^{-1}HV = H$ и $V = 1 + i\delta\vec{\varphi}\dfrac{\vec{M}}{\hbar}$ следует, что $[H, \vec{M}] = 0$.

Получаем, что полный момент импульса замкнутой системы сохраняется: $\dfrac{d\vec{M}}{dt} = 0$.

Мы можем в дальнейшем рассматривать одну частицу. Так как операторы, относящиеся к разным частицам, коммутируют, то все коммутационные соотношения, верные для одной частицы, будут верны и для системы частиц.

Введем операторы проекций момента импульса $M_i = -i\hbar[r,\nabla]_i$ и определим операторы $L_i = \dfrac{1}{\hbar}M_i$ и $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$.

Задача. Проверьте, что в координатном представлении

$$\begin{aligned} L_1 &= i\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}\right), \\ L_2 &= i\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \\ L_3 &= i\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right). \end{aligned} \tag{41}$$

Задача. Проверьте, что операторы L_i действуют только на угловые переменные, т. е. для любой $\psi = \psi(r)$ выполнено $L_i\psi(r) = 0$.

Задача. Проверьте, что операторы L_i и L^2 удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

1. $[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k$;
2. $[L^2, L_i] = 0$. (42)

Из последней задачи следует, что проекции момента импульса не являются одновременно измеряемыми величинами. Одновременно могут быть измерены только квадрат момента импульса и одна из его проекций. Обычное соглашение состоит в том, что измеряемая проекция момента импульса — это $\hbar L_3 = \hbar L^z$. Удобно ввести следующие операторы: $L_+ = L_1 + iL_2$, $L_- = L_1 - iL_2$.

Задача. Проверьте следующие соотношения:

1. $$\begin{aligned} &[L_+, L_-] = 2L_3; \\ &[L_3, L_+] = L_+; \\ &[L_3, L_-] = -L_-. \end{aligned} \tag{43}$$

2. $L^2 = L_+L_- + L_3^2 - L_3 = L_-L_+ + L_3^2 + L_3$.

Удобно иметь вид введенных операторов в координатном представлении полярных координат

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Задача. Проверьте, что

1. $L_3 = -i\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$;

2. $$L_+ = e^{i\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]; \qquad L_- = e^{-i\varphi}\left[-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]; \tag{44}$$

3. $L^2 = -\left[\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]$;

4. $\Delta = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right) - \dfrac{1}{r^2}L^2$.

Из последней задачи следует, что оператор L^2 равен, с точностью до множителя, угловой части оператора Лапласа.

(ЛЛЗ, Гл. 4, § 26.)

Спектр операторов L^2 и L_3

Найдем собственные значения операторов L^2 и L_3. Рассмотрим подпространство, соответствующее одному фиксированному собственному значению оператора L^2. Обозначим его A, т.е. $L^2\psi = A\psi$. Пусть ψ_M — собственный вектор L_3 из этого подпространства с собственным значением M, т.е. $L_3\psi_M = M\psi_M$. Из координатного представления $\left(L_3 = -i\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ получаем, что $\psi_M = f(r,\theta)e^{iM\varphi}$, а из однозначности ψ_M следует, что $M = 0, \pm 1, \ldots$ целое.

$$\left(\left(L^2 - L_3^2\right)\psi_M, \psi_M\right) = \left(A\psi_M - M^2\psi_M, \psi_M\right) = A - M^2,$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned}\left(\left(L^2 - L_3^2\right)\psi_M, \psi_M\right) &= \left(L_1^2\psi_M, \psi_M\right) + \left(L_2^2\psi_M, \psi_M\right) = \\ &= (L_1\psi_M, L_1\psi_M) + (L_2\psi_M, L_2\psi_M) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Поэтому $|M| \leqslant \sqrt{A}$. Получаем, что собственные значения оператора L_3 на нашем пространстве ограничены сверху и снизу.

Обозначим $M_{\max} = L$. Из задачи предыдущего параграфа следует, что

(а) $L_3(L_+\psi_M) = (L_+L_3 + L_+)\psi_M = (M+1)L_+\psi_M$, т.е. $L_+\psi_M = \psi_{M+1}$ и, также, $L_-\psi_M = \psi_{M-1}$;

(б) $L_+\psi_L = 0$ и $L^2\psi_L = \left(L_-L_+ + L_3^2 + L_3\right)\psi_L = L(L+1)\psi_L$, т.е. $A = L(L+1)$;

(в) $L_-\psi_{-L} = 0$.

Получаем, что собственное подпространство с фиксированным собственным значением $L(L+1)$ оператора L^2 имеет размерность $2L+1$ и набор собственных значений оператора L_3 на нём $\mathcal{L} = \{-L, \ldots, L-1, L\}$.

Говорят, что уровень энергии, соответствующий моменту L, $(2L+1)$-*кратно вырожден*, если $[H, L_i] = 0$.

Теперь можно найти матричные элементы операторов L_3, L_+ и L_- в этом подпространстве (представлении) в базисе собственных векторов $\psi_M = |M\rangle$ оператора L_3.

$$(L_3)_{MM'} = M\delta_{MM'}, \quad \text{где} \quad M \in \mathcal{L}.$$

$$L(L+1) = \langle M|L_+|M-1\rangle\langle M-1|L_-|M\rangle + M^2 - M = \\ = (\langle M|L_+|M-1\rangle)^2 + M^2 - M.$$

Следовательно,

$$\langle M|L_+|M-1\rangle = \langle M-1|L_-|M\rangle = \sqrt{(L+M)(L-M+1)}.$$

Задача. Выпишите матрицы операторов L_3, $L_\pm$, L_1, L_2 в этом базисе.

(ЛЛ3, Гл. 4, § 27.)

Собственные функции оператора момента

В этом параграфе все большие буквы становятся маленькими: $L = l$, $M = m$.

Пусть $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — собственные функции операторов L^2 и L_3, которые при фиксированном l образуют $(2l+1)$-мерное представление алгебры $\mathfrak{so}(3)$:

$$\begin{cases} L^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi), \\ L_3 Y_{lm}(\theta,\varphi) = mY_{lm}(\theta,\varphi). \end{cases}$$

Из формул предыдущих параграфов следует, что

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}\theta_{lm}(\theta),$$

$$Y_{ll}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iml}\theta_{ll}(\theta),$$

$$\frac{d\theta_{ll}(\theta)}{d\theta} - l(\operatorname{ctg}\theta)\theta_{ll}(\theta) = 0 \qquad (L_+Y_{ll} = 0).$$

Решая последнее уравнение, получаем

$$\theta_{ll}(\theta) = N_l \sin^l\theta.$$

Задача. Найдите нормировочный множитель N_l такой, чтобы интеграл $\theta_{ll}^2(\theta)$ по единичной сфере был равен 1.

Осталось только воспользоваться равенством $L_-\psi_M = \psi_{M-1}$:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2l)!}}(L_-)^{l-m}Y_{ll}(\theta,\varphi).$$

(ЛЛ3, Гл. 4, § 28.)

[Лекция 19]

Движение в центрально-симметричном поле

Оператор Шредингера для свободной частицы в трехмерном пространстве в координатном представлении имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta.$$

Уравнение на собственные функции

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = E\psi, \quad E = k^2 > 0$$

имеет решения

$$\psi_{\vec{k}}(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} e^{i\frac{\sqrt{2m}k}{\hbar}(\vec{x},\vec{k})},$$

где $\vec{k} \in S^2$ — вектор на единичной сфере.

Спектр оператора H является положительным, непрерывным и бесконечнократным. Каждому направлению $\vec{k}$ соответствует собственная функция $\psi_{\vec{k}}(x)$. Собственные функции «нумеруются» точками единичной сферы.

Оператор Шредингера для частицы в потенциальном поле в координатном представлении имеет вид $H = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)$.

Как и в классической механике, в квантовой механике к задаче о движении частицы в потенциальном поле сводится задача о движении двух тел.

Рассмотрим систему двух частиц m_1 и m_2 с потенциалом взаимодействия $V(\vec{x}_1-\vec{x}_2)$. Оператор Шредингера для такой системы в координатном представлении имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2 + V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2).$$

Как и в классической задаче, введем переменные:

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad x = x_1 - x_2, \quad M = m_1 + m_2,$$
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ — приведенная масса.}$$

Задача. Проверьте, что в новых переменных

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_X - \frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_x + V(x).$$

В уравнении на собственные значения

$$H\Psi(X,x) = E\Psi(X,x)$$

переменные разделяются, и решение можно искать в виде

$$\Psi(X,x) = \psi(X)\psi_1(x).$$

Функции $\psi(X)$ и $\psi_1(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta\psi(X) = \varepsilon\psi(X),$$
$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi_1(x) + V(x)\psi_1(x) = \varepsilon_1\psi_1(x).$$

где $E = \varepsilon + \varepsilon_1$. Первое из этих уравнений есть уравнение на собственные значения оператора Шредингера свободной частицы, а второе совпадает с уравнением Шредингера для частицы массы μ в потенциале $V(x)$.

Как и в классическом случае, наиболее важным является случай центрально-симметричного поля, в котором $V(x) = V(|x|) = V(r)$.

Уравнение Шредингера для движения частицы в центрально-симметричном поле имеет вид

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(r)]\psi = 0. \tag{45}$$

Будем искать стационарные состояния в виде $\Psi(r,\theta,\varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$, т. е. рассматривать волновые функции с фиксированным значением момента l и его проекции m:

$$H\Psi = E\Psi, \quad L^2\Psi = l(l+1)\Psi, \quad L_3\Psi = m\Psi.$$

Вспомнив (44), получаем

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}R(r) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(r)]R(r) = 0. \tag{46}$$

Заметим, что уравнение (46) не содержит значения проекции момента m, что соответствует $(2l+1)$-кратному вырождению по направлению момента.

(ЛЛ3, Гл. 5, § 32.)

Движение в кулоновом поле

Кулоновым, как и в классике, называется потенциал вида $V(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$. Уравнение (46) примет вид

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}R + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E + \frac{\alpha}{r}\right]R = 0. \tag{47}$$

Задача. Проверьте, что при замене $r = \dfrac{\hbar^2}{m\alpha}r_1$, $E = \dfrac{m\alpha^2}{\hbar^2}E_1$ уравнение (47) преобразуется в

$$R'' + \frac{2}{r}R' - \frac{l(l+1)}{r^2}R + 2\left(E + \frac{1}{r}\right)R = 0. \tag{48}$$

Рассмотрим поведение решения $R(r)$ в двух случаях.

(1) $r \to 0$, $R(r) \to r^{\alpha}$.

При $r \to 0$ главными являются первые три члена уравнения (48). Приравнивая нулю коэффициенты в (48) при $r^{\alpha-2}$, получаем

$$\alpha(\alpha-1)+2\alpha-l(l+1)=0 \qquad (49)$$

или $\alpha(\alpha+1)=l(l+1)$. Следовательно, $\alpha=l$ или $\alpha=-(l+1)$. Отсутствие расходимости при $x=0$ диктует выбор

$$\alpha = l.$$

(2) $r\to\infty$.

При $r\to\infty$ главными являются члены

$$R''+2ER=0, \quad \text{т.е.} \quad R(r)=e^{\pm\sqrt{-2E}\,r}f(r).$$

При отрицательных значениях спектра $E<0$ отсутствие расходимости при $r\to\infty$ диктует выбор знака

$$R(r)=e^{-\sqrt{-2E}\,r}f(r).$$

Обозначим $n=\dfrac{1}{\sqrt{-2E}}$ (пока это только обозначение, но скоро будет показано, что n — целое).

Будем искать решение

$$R_{nl}(r)=r^l e^{-\sqrt{-2E}\,r}W(r). \qquad (50)$$

Подставляя (50) в (48), получаем уравнение на $W(r)$:

$$W''+\left[(2l+1)\frac{1}{r}+2\left(-\sqrt{-2E}\right)\right]W'+ \\ +\left[(2l+1)\left(-\sqrt{-2E}\right)\frac{1}{r}+\frac{2}{r}\right]W=0. \qquad (51)$$

Задача. Проверьте это.

Уравнение (51) является вырожденным гипергеометрическим уравнением, про которое известно, что решение (51), имеющее постоянный предел при $r\to 0$ и растущее не быстрее степени на ∞, существует при $-(-2E)^{-1/2} = n$ целом. Получаем, что $E = -\dfrac{1}{2n^2}$, где n — целое. Вспомнив замену, сделанную в уравнении (47), получаем дискретный спектр кулонового потенциала:

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 n^2}. \tag{52}$$

(ЛЛ3, Гл. 5, § 36.)

Скрытая симметрия в кулоновой задаче

Положим $m = 1$, $\alpha = 1$, $\hbar = 1$. Заметим, что получив ответ в безразмерном виде, правильный ответ можно восстановить из соображений размерности, замечая, что

$$[L] = \frac{\hbar^2}{m\alpha}, \quad [T] = \frac{\hbar^3}{m\alpha^2}, \quad [M] = m, \quad [E] = \frac{m\alpha^2}{\hbar^2}.$$

Гамильтониан кулоновой задачи равен $\widehat{H} = \dfrac{\widehat{p}^2}{2} - \dfrac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

В классическом случае в кулоновой задаче существует первый интеграл вида

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} - [\vec{p}, \vec{L}].$$

Рассмотрим аналогичный оператор в квантовой задаче:

$$\widehat{\vec{A}} = \frac{\widehat{r}}{r} - [\widehat{\vec{p}}, \widehat{\vec{L}}],$$

где последняя скобка понимается сначала как векторное произведение векторов, а потом — превращение их в операторы, т. е.

$$\widehat{A}_1 = \frac{x_1}{r} - p_2 L_3 + p_3 L_2,$$
$$\widehat{A}_2 = \frac{x_2}{r} - p_3 L_1 + p_1 L_3,$$

$$\widehat{A}_3 = \frac{x_3}{r} - p_1 L_2 + p_2 L_1.$$

Задача. Проверьте, что $\widehat{A} = \dfrac{\widehat{\vec{r}}}{r} - \dfrac{1}{2}([\widehat{p}, \widehat{L}] - [\widehat{L}, p])$ (см. ЛЛ3, § 36).

Задача. Проверьте следующие соотношения для операторов A_i:

$$\begin{aligned} [L_i, A_k] &= i\varepsilon_{ijk} A_k, \\ [A_i, A_k] &= -2i\varepsilon_{ijk} H L_k. \end{aligned} \tag{53}$$

Задача. Выведите из соотношений (53) или прямым вычислением, что

$$[H, A_k] = 0. \tag{54}$$

Последнее соотношение показывает, что и в квантовой кулоновой задаче $\vec{A}$ является первым интегралом.

Фиксируем уровень энергии $E < 0$, т. е. рассмотрим подпространство $H\psi = E\psi$. На этом подпространстве последнее соотношение (53) примет вид

$$[A_i, A_k] = -2Ei\varepsilon_{ijk} L_k. \tag{55}$$

Введем новые операторы $\vec{N} = \dfrac{\vec{A}}{\sqrt{-2E}}$. С учетом этой нормировки коммутационные соотношения для L_k и N_k выглядят как соотношения для образующих алгебры $\mathfrak{so}(4)$:

$$\begin{cases} [L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k, \\ [L_i, N_k] = i\varepsilon_{ijk} N_k, \\ [N_i, N_k] = i\varepsilon_{ijk} L_k. \end{cases}$$

Мы получили, что пространство состояний с заданной энергией — это пространство представления группы O(4).

Задача. Проверьте, что на этом подпространстве выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \vec{L}\vec{N} &= 0, \\ L^2 + N^2 &= -1 - \frac{1}{2E}. \end{aligned} \tag{56}$$

Алгебра $\mathfrak{o}(4)$ изоморфна $\mathfrak{o}(3) \times \mathfrak{o}(3)$. Действительно, введем операторы
$$\vec{J}_1 = \frac{1}{2}(\vec{L} + \vec{N}), \quad \vec{J}_1 = \frac{1}{2}(\vec{L} - \vec{N}).$$

Задача. Проверьте, что компоненты каждого из операторов $\vec{J}_i$ коммутируют, как образующие $\mathfrak{so}(3)$, т. е.

$$\begin{aligned}
&[J_{1i}, J_{1j}] = i\varepsilon_{ijk} J_{1k},\\
&[J_{2i}, J_{2j}] = i\varepsilon_{ijk} J_{2k},\\
&[J_{1i}, J_{2j}] = 0.
\end{aligned}$$

Для новых операторов $\vec{J}_i$ соотношения (56) примут вид

$$\vec{J}_1^2 = \vec{J}_1^2 = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2E}\right) = j(j+1).$$

Последнее равенство пока что является только обозначением. Покажем, повторяя почти дословно рассуждения из лекции 18, что j — целое или полуцелое.

Задача. Докажите, что в нашем подпространстве существует базис из собственных векторов оператора J_3, таких что $J_3 e_m = me_3$, где m — целые числа.

Задача. Покажите, что оператор $J^2 = j(j+1)\mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ — единичный оператор.

Задача. Введя операторы J_+ и J_- ($J_\pm = J_1 \pm iJ_2$), найдите их коммутационные соотношения и докажите, что $|m| \leqslant \sqrt{j(j+1)}$.

Задача. Проверьте, что $J_\pm e_m = -\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} e_{m\pm 1}$.

Пусть m_1 и m_2 — наименьшее, соответственно, наибольшее из чисел m.

Задача. Проверьте следующие соотношения

$$\begin{aligned}
J_- e_{m_1} &= 0, & J_+ e_{m_2} &= 0,\\
(J^2 - J_3^2 + J_3) e_{m_1} &= 0, & (J^2 - J_3^2 - J_3) e_{m_2} &= 0.
\end{aligned}$$

Задача. Введите из этих соотношений, что

$$j(j+1) - m_1^2 + m_1 = 0,$$

$$j(j+1)-m_2^2-m_2=0,$$
$$(m_1+m_2)(m_1-m_2-1)=0.$$

Получаем, что $m_1+m_2=0$ или $m_1=-m_2$ $(m_2 \geqslant m_1)$. $m_2-m_1=2m_2$ — целое число или нуль, поэтому m_2 принадлежит множеству $\left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\right\}$. Получаем, что $j=m_2 \in$ $\in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\right\}$. Значит, $E_n=-\frac{1}{2(2j+1)^2}=-\frac{1}{2n^2}$ или, переходя к размерным величинам, $E_n=-\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2 n^2}$.

Уровни с данной энергией E_n не зависят от l и m и, следовательно, $(2j+1)(2j+1)=n^2$-кратно вырождены. Это «случайное» вырождение объясняется O(4)-симметрией.

Движение в кулоновом поле. Продолжение

Вернемся к уравнению

$$R''+\frac{2}{r}R'-\frac{l(l+1)}{r^2}R+2(E+1/r)R=0.$$

Решим его другим методом. Чтобы избавиться от первой производной, сделаем замену $R(r)=\frac{\chi(r)}{r}$ с условием, что $\int|\chi(r)|^2\,dr$ должен сходиться при $r=0$. Получаем

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2}{r}\right]\chi=-2E\chi.$$

Задача. Проделайте все вычисления.

При $r\to\infty$ решение должно иметь асимптотику $\chi\to e^{-\sqrt{-2E}r}$. Сделаем еще замену $\chi(r)=f(r)e^{-r/a}$, где $a=\frac{1}{\sqrt{-2E}}$. Получаем

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{2}{a}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{-2}{r}\right]f=0.$$

Будем искать решение в виде ряда $f(r)=\sum c_s r^s$. Тогда

$$\sum_s\left\{s(s-1)z^{s-2}-\frac{2s}{a}r^{s-1}-l(l+1)r^{s-2}+2r^{s-1}\right\}=0,$$

и мы получаем рекуррентное соотношение

$$c_s[s(s-1)-l(l+1)] = c_{s-1}\left[2\frac{s-1}{a}-2\right]. \tag{57}$$

Из условия на $\int |\chi(r)|^2\,dr$ следует, что $s = l+1$.

Задача. Разберите случай $s = -l$.

Рассмотрим теперь асимптотику ряда при больших s. Тогда $\dfrac{c_s}{c_{s-1}} \sim \dfrac{2}{sa}$. Поэтому, если ряд не обрывается при больших s, то он сходится к $\sum \dfrac{1}{s!}\left(\dfrac{2r}{a}\right)^s = e^{2r/s}$, и при больших r получаем $\chi(r) \to$ $\to e^{r/a}$, что физически неприемлемо.

Ряд оборвется, если для некоторого $s = n+1$, $(n > l)$ будет выполнено соотношение $\left[2\dfrac{n}{a}-2\right] = 0$. Тогда $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = 0$. Отсюда $E = -\dfrac{1}{2n^2}$. Или, в размерных величинах, $E_n = -\dfrac{\mu\alpha^2}{2\hbar^2 n^2}$.

Замечание. Формула (52) для энергетических уровней в кулоновой задаче позволяет вычислить частоты спектральных линий, например, для атома водорода ($\alpha = e^2$). Из (52) и формулы Бора

$$\hbar\omega_{mn} = E_n - E_m, \quad E_n > E_m$$

получается формула

$$\omega_{mn} = \frac{\mu e^4}{2\hbar^3}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right), \quad n < m, \tag{58}$$

известная как формула Бальмера и открытая им чисто эмпирически до создания квантовой механики. Вычисленные по формуле (58) спектральные линии атома водорода с удивительной точностью совпадают со спектральными линиями (серия Лаймана, Бальмера, Пашена и т. д.) реального атома водорода, наблюдаемыми в эксперименте (см. лекцию 13).

Итак, мы получили, что уровню $E_n = -\dfrac{\mu\alpha^2}{2n^2\hbar^2}$ соответствуют волновые функции

$$\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = r^l e^{-\sqrt{\frac{\mu\alpha^2}{\hbar^2 n^2}}\,r} P_{nl}(r) Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

где $P_{nl}(r) = f(r)$ — многочлен, коэффициенты которого вычисляются по формуле (57), степени $n - l - 1$.

Задача. Проверьте еще раз, что степень вырождения равна n^2.

Решение. Нужно подсчитать число функций $\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$ для данного n. Их число равно $\sum\limits_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2$.

Спин электрона

Рассмотрим систему частиц, как единое целое, находящуюся в определенном состоянии. Она обладает определенной внутренней энергией (собственное значение оператора H) и определенным моментом (собственное значение оператора L^2). Естественно и каждой элементарной частице приписать некоторый «собственный» момент.

Стоит еще раз упомянуть опыты Штерна и Герлаха, показавшие, что при включении магнитного поля пучок атомов водорода раздваивается. Это означает, что проекция на направление магнитного поля момента атома водорода в основном состоянии принимает два значения. Абсолютно так же ведет себя и пучок электронов. Поэтому естественно считать, что электрон имеет собственный момент импульса, проекция которого на некоторое направление принимает два значения.

Собственный момент электрона называется *спином*, а момент импульса, связанный с движением электрона в пространстве, называется *орбитальным моментом.*

Полный момент системы частиц является суммой их орбитальных моментов и спинов.

Итак спин — это новая наблюдаемая, принимающая два значения. Следовательно, число состояний электрона должно удвоиться. Мы должны считать, например, что электрон может находиться в двух различных внутренних состояниях, не зависящих от его «внешнего» состояния. Посмотрим, как математически описать эту ситуацию для электрона.

Пусть $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ — пространство состояний электрона.

$\Psi(x,y,z) \in \mathcal{H}$. Рассмотрим пространство $H = \mathbb{C}^2$ с базисом $u_1 = \binom{1}{0}$ и $u_2 = \binom{0}{1}$. В этом пространстве и будет действовать наблюдаемая спин. Теперь пространством состояний с учетом спина будет

$$\mathcal{H}_S = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes H.$$

Самосопряженный оператор S, действующий в H, можно представить в виде

$$S = \alpha_0 I + \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3, \quad \text{где}$$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

матрицы Паули.

Обозначим $s_j = \dfrac{\hbar}{2}\sigma_j$, $j = 1, 2, 3$.

Задача. Проверьте, что s_j удовлетворяют коммутационным соотношениям (42)

$$[s_i, s_j] = i\varepsilon_{ijk} s_k \hbar.$$

Таким образом, операторы s_i удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и компоненты углового момента. Поэтому естественно предполагать, что s_i соответствуют вкладу собственного углового момента.

Задача. Проверьте, что $s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \dfrac{3}{4}\hbar^2$.

Собственное значение оператора s^2 записывают в виде $\dfrac{3}{4}\hbar^2 = s(s+1)\hbar^2$, где $s = \dfrac{1}{2}$. Именно в этом смысле говорят, что спин электрона равен $\dfrac{1}{2}$.

Задача. Проверьте, что собственные значения оператора s_3 на векторах h_1, h_2 равны, соответственно, $\dfrac{1}{2}$ и $-\dfrac{1}{2}$.

Задача. Проверьте, что все операторы s_j имеют собственные значения $\pm\dfrac{1}{2}$.

Пространство состояний $\mathcal{H}_S$ естественно представлять как пары функций

$$\Psi(x,y,z) = \begin{pmatrix} \psi_1(x,y,z) \\ \psi_2(x,y,z) \end{pmatrix},$$

отождествив $\psi(x,y,z)\otimes h_1$ с $\binom{\psi(x,y,z)}{0}$, а $\psi(x,y,z)\otimes h_2$ с $\binom{0}{\psi(x,y,z)}$.

Вектор-функция $\Psi(x,y,z)=\binom{\psi_1}{\psi_2}$ называется спинором. Физики $\Psi(x,y,z)$ записывают как $\Psi(x,y,z,\sigma)$, понимая $\sigma=\dfrac{1}{2}$ (или «+») как компоненту $\mathcal{H}\otimes h_1$, $\sigma=-\dfrac{1}{2}$ (или «−») как компоненту $\mathcal{H}\otimes h_2$.

Если сферически-симметричному гамильтониану H соответствует представление ρ_1 в пространстве $\mathcal{H}$ и ρ_2 в пространстве H, то

$$\rho_s(g)=\rho_1(g)\otimes\rho_2(g)$$

представление SO(3) в пространстве $\mathcal{H}_S=\mathcal{H}\otimes H$.

Следовательно, для системы со сферически-симметричным оператором Шредингера справедлив закон сохранения полного момента импульса $J_j=L_j+s_j$.

(ЛЛ3, Гл. 8, § 54, 55, с. 234.)

[Лекция 20]

Теория возмущений

Точному решению уравнения Шредингера

$$H\psi_n=E_n\psi_n \tag{59}$$

поддаются немногие системы. Однако если $H=H_0+V$, H_0 — точно решаемая задача, а $V\ll H_0$ — малое возмущение, то задачу с гамильтонианом H можно решить приближенно. Такая теория называется «теорией возмущений». В теории возмущений есть два метода.

В одном — возмущение рассматривается как причина изменения состояний. Этот метод полезен для стационарного случая.

В другом — состояния не меняются, а система совершает переходы между состояниями.

Стационарный, невырожденный случай

Пусть H_0 и V не зависят от времени. Пусть нам известно решение невозмущенной задачи

$$H_0\psi_n^0 = E_n^0\psi_n^0, \tag{60}$$

спектр которой мы будем считать невырожденным и дискретным. Будем искать ψ_n в виде

$$\psi_n = \sum_m c_m(n)\psi_m^0. \tag{61}$$

Подставив (61) в (59), получим

$$(H_0+V)\left(\sum_m c_m(n)\psi_m^0\right) = E_n\left(\sum_m c_m(n)\psi_m^0\right),$$
$$\sum_m c_m(n)\left(E_m^0\psi_m^0 + V\psi_m^0\right) = \sum_m c_m(n)E_n\psi_m^0.$$

Умножив скалярно на вектор ψ_k^0 последнее равенство, получим

$$\left(E_n - E_k^0\right)c_k(n) = \sum_m c_m(n)V_{km}, \tag{62}$$

где $V_{km} = \langle\psi_k^0|V|\psi_m^0\rangle = \int\overline{\psi}_k^0 V\psi_m^0\,dV$.

Разложим теперь E_n и $c_m(n)$ по параметру малости, т. е. будем искать E_n и $c_m(n)$ в виде

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^0 + E_n^1 + E_n^2 + \ldots\,, \\ c_m(n) &= \delta_m^n + c_m^1(n) + c_m^2(n) + \ldots\,, \end{aligned} \tag{63}$$

где E_n^1 и c_m^1 порядка малости V, E_n^2 и c_m^2 второго порядка малости по V и т. д.

Подставим (63) в (62) и приравняем члены с одинаковыми порядками малости по V.

Задача. Проделайте эти вычисления и выпишите системы, которые получатся.

Получаем

$$\left(\left(E_n^0 - E_k^0\right) + E_n^1 + E_n^2 + \ldots\right)\left(\delta_k^n + c_k^1(n) + c_k^2(n) + \ldots\right) =$$

$$= \sum_m \left(\delta_m^n + c_m^1(n) + c_m^2(n) + \ldots\right) V_{km}.$$

Сравнивая нулевой порядок малости, получаем

$$\left(E_n^0 - E_k^0\right) \delta_k^n = 0.$$

Из первого порядка малости следует, что

$$E_n^1 \delta_k^n + c_k^1(n) \left(E_n^0 - E_k^0\right) = \sum_m \delta_m^n V_{km}.$$

1) $n = k$, следовательно, $E_n^1 = V_{nn}$;

2) $n \neq k$, следовательно, $c_k^1 = \dfrac{V_{kn}}{E_n^0 - E_k^0}$.

Величина $c_n^1(n)$ не находится из этих уравнений. Из условия нормировки (это «заклинание» означает, что мы хотим, чтобы $|\psi_n^0 + \psi_n^1|^2$, где

$$\psi_n^1 = \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn}}{E_n^0 - E_m^0} \psi_m^0, \tag{64}$$

отличалась от 1 на второй порядок малости) следует, что $c_n^1(n) = 0$.

Из поправки первого приближения к волновым функциям (64) следует, что метод применим, если

$$|V_{mn}| \ll |E_n^0 - E_m^0|.$$

Сравнивая теперь второй порядок малости, получаем

$$E_n^2 \delta_k^n + E_n^1 c_k^1(n) + \left(E_n^0 - E_k^0\right) c_k^2(n) = \sum_m c_m^1(n) V_{km}.$$

1) $n = k$, $E_n^2 = \sum\limits_{m \neq n} \dfrac{|V_{mn}|^2}{E_n^0 - E_m^0}$;

2) $n \neq k$,

$$c_k^2(n) = \frac{1}{(E_n^0 - E_k^0)} \left(\sum_{m \neq n} \frac{V_{mn} V_{km}}{E_n^0 - E_m^0} - \frac{V_{kn} V_{nn}}{E_n^0 - E_k^0} \right).$$

И т. д.

Задача. Найдите первую и вторую поправки к уровням энергии ангармонического осциллятора

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 + \beta x^4.$$

Вырожденный случай

Пусть $\psi_{n,\alpha}^0$, $\alpha = 1, \ldots, N$ — линейно независимые решения уравнения $H_0 \psi_{n,\alpha}^0 = E_n^0 \psi_{n,\alpha}^0$, соответствующие N-кратному вырожденному собственному значению E_n^0. Будем называть векторы в этом подпространстве *правильными*, если они мало меняются под действием возмущения.

Будем искать функции нулевого приближения как линейные комбинации функций $\psi_{n,\alpha}^0$. Тогда на коэффициенты $c^{(1)} = (c_\alpha^1)$ этой линейной комбинации получаем линейное однородное уравнение

$$(V - E^{(1)} I) c^{(1)} = 0, \quad \text{где} \quad V = (V_{\alpha,\beta}),$$

$$V_{\alpha,\beta} = \int \widehat{\psi}_{n,\alpha}^0 V \psi_{n,\beta}^0, \quad I \text{ — единичная } N \times N \text{ матрица.}$$

Это уравнение имеет ненулевое решение при условии $\det(V - E^{(1)} I) = 0$, что определяет первые поправки к энергии.

Получаем следующий результат.

Правильные волновые функции нулевого приближения — это собственные векторы оператора возмущения, спроектированные на подпространство данного вырожденного уровня. Поправка к уровню энергии, соответствующая данной правильной волновой функции, равна среднему от возмущения в этом состоянии.

Задача. Найти волновые функции в первом приближении.

Применение. Атом в магнитном поле. Эффект Зеемана

Рассмотрим атом (например, водорода) в постоянном малом магнитном поле. Пренебрежем полным спином атома и вместо суммы будем рассматривать один электрон. Напомним, что в классической теории

$$L(q,\dot q)=\frac{m\vec v^2}{2}+\frac{e}{c}\vec A\vec v-e\varphi,$$

при условии $\operatorname{div}A=0$. Чтобы получить $\widehat H$, нужно из уравнения $p=\dfrac{\partial L}{\partial \dot q}$ выразить $\dot q=\dot q(p,q)$ и подставить в $H=H(p,q)=p\dot q-{}$ $-L(q,\dot q)$.

Проделаем все это с нашим лагранжианом

$$\vec p=\frac{\partial L}{\partial \vec v}=m\vec v+\frac{e}{c}\vec A,\quad \vec v=\frac{1}{m}\vec p-\frac{e}{mc}\vec A.$$

Замечая, что нет проблемы с расстановкой порядка операторов $\widehat p$ и $\widehat A$, так как $[\widehat p,\widehat A]=-i\hbar\operatorname{div}A=0$, получаем

$$\widehat H=pv-L=\left(\widehat{mv+\frac{e}{c},v}\right)-L=\frac{1}{2m}\left(\widehat p-\frac{e}{c}\widehat A\right)^2+e\widehat\varphi=$$
$$=\widehat H_0+\frac{|e|}{mc}\widehat A\widehat p+\frac{e^2}{2mc^2}(\widehat A)^2,$$

где $H_0=\dfrac{p^2}{2m}+e\varphi$.

Условия $\vec H=\operatorname{rot}\vec A$, $\operatorname{div}\vec A=0$ выполняются для постоянного магнитного поля $\vec H$, если $\vec A=\dfrac12[\vec H,\vec r]$. Подставляя это выражение в гамильтониан и пренебрегая последним членом из-за его второго порядка малости по H, получаем

$$\widehat H\approx\widehat H_0+\frac{|e|}{2mc}[\vec H,\vec r]\widehat p=\widehat H_0+\frac{|e|}{2mc}\vec H[\vec r,\widehat p]=\widehat H_0+\frac{|e|}{2mc}\vec H\widehat L,$$

где $\widehat L=[\widehat r,\widehat p]$.

Считая, что магнитное поле направлено по оси z, получаем, что по теории возмущений поправка $\Delta E = \mu_B H\overline{L}_z$, где $\mu_B = \dfrac{|e|\hbar}{2mc}$, а $\overline{L}_z$ равно среднему значению невозбужденного состояния z-й составляющей момента. Т. е. магнитное поле снимает вырождение углового момента вдоль своего направления. Это называют *эффектом Зеемана*.

Посмотрим на это явление с точки зрения теории представления групп. У сферически-симметричного гамильтониана (кулонова задача, электрон атома водорода) все пространство состояний раскладывается в прямую сумму пространств неприводимых представлений группы SO(3). После включения магнитного поля по оси x_3 (z) каждое неприводимое представление SO(3) ограничивается на подгруппу $S^1 \subset \mathrm{SO}(3)$, состоящую из вращений вокруг этой оси. S^1 — абелева группа и все ее неприводимые представления одномерны, а состояния, соответствующие разным инвариантным относительно S^1 подпространствам, имеют, вообще говоря, разные энергетические уровни. Это расщепление спектральных линий при включении магнитного поля наблюдается в эксперименте.

Возмущения, зависящие от времени

Пусть теперь возмущение зависит от времени: $V = V(t)$. Будем считать, что нам известны волновые функции ψ_k^0 невозмущенной задачи, т. е. решения нестационарного уравнения Шредингера для невозмущенного гамильтониана H_0

$$i\hbar\frac{\partial\psi_k^0}{\partial t} = H_0\psi_k^0, \tag{65}$$

а произвольное решение (65) может быть записано в виде $\psi = \sum a_k\psi_k^0$. Будем искать решение уравнения

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (H_0 + V)\psi \tag{66}$$

в виде

$$\psi = \sum_k a_k(t)\psi_k^0. \tag{67}$$

Подставляя (67) в (66) и учитывая (65), получаем

$$i\hbar\sum_k \psi_k^0 \frac{\partial a_k(t)}{\partial t} = \sum_k a_k V \psi_k^0. \tag{68}$$

Умножив (68) скалярно на ψ_m^0, получим

$$i\hbar\frac{\partial a_m(t)}{\partial t} = \sum_k a_k(t) V_{mk}(t), \tag{69}$$

где $V_{mk}(t) = \langle\psi_m^0(t)|V|\psi_k^0(t)\rangle = \int \overline{\psi}_m^0(t) V \psi_k^0(t)\, dV = V_{mk} e^{i\omega_{mk}t}$, $\omega_{mk} = \dfrac{E_m^0 - E_k^0}{\hbar}$, V_{mk}, вообще говоря, тоже зависят от времени:

$$V_{mk} = \left\langle\psi_m^0|V|\psi_k^0\right\rangle = \int \overline{\psi}_m^0 V(t) \psi_k^0\, dV.$$

Пусть $V \to 0$ при $t \to \pm\infty$.

Рассмотрим возмущение n-го стационарного состояния ψ_n^0 при изменении времени t от $-\infty$ к $+\infty$. Ищем $\psi_n(t)$ в виде

$$\psi_n(t) = \sum_k a_{nk}(t)\psi_k^0 e^{-\frac{E_n}{\hbar}t},$$
$$a_{nk}(t) = a_{nk}^0 + a_{nk}^1(t),$$

где $a_{nk}^0 = \delta_n^k$ имеет нулевой порядок малости, а $a_{nk}^1(t)$ имеет первый порядок малости по V.

В первом приближении получаем

$$i\hbar\frac{da_{nk}^1(t)}{dt} = V_{nk}(t),$$
$$a_{nk}^1(t) = -\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{t} V_{nk} e^{i\omega_{nk}t}\, dt.$$

Следовательно, $a_{nk}(t) = a_{nk}^1(t)$ при $n \neq k$, а $a_{nn}(t) = 1 + a_{nn}^1(t) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{t} V_{nn}\, dt$.

Вероятность перехода из состояния n в состояние k при $t \to \to +\infty$ равна

$$W_{nk} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} V_{nk} e^{i\omega_{nk}t}\, dt \right|^2. \tag{70}$$

Периодическое возмущение. Атом в поле электромагнитной волны

Пусть $\widehat{V} = e\widehat{E}(\omega)e^{i\omega t}$. Из формулы (70) получаем, что

$$W_{nk} = \frac{e^2}{\hbar^2} \left| \int \overline{\psi}_n E(\omega) \psi_k\, dV \right|^2 \left| \int e^{i\omega t} e^{i\omega_{nk}t}\, dt \right|^2. \tag{71}$$

Последний сомножитель в (71) не обращается в нуль, если $\omega = = -\omega_{nk}$. Получаем, что ненулевая вероятность перехода W_{nk} существует между состояниями при условии $\omega = -\dfrac{E_n - E_k}{\hbar}$ или $E_k - - E_n = \hbar\omega$. Этот результат соответствует правилу Бора о поглощении атомом кванта света.

(ЛЛ3, Гл. 6, § 38 – 42, с. 163.)

[Лекция 21]

Квазиклассическое приближение

Пусть $\lambda = \dfrac{\hbar}{p} \ll L$, где L — некая длина, свойственная данной задаче. Такие системы называются *квазиклассическими*.

В уравнении Шредингера

$$\frac{\hbar}{2m}\Delta\psi + (E - U)\psi = 0 \tag{72}$$

сделаем подстановку $\psi = e^{i\frac{\sigma}{\hbar}}$. Получаем

$$\frac{1}{2m}(\nabla\sigma)^2 - \frac{i\hbar}{2m}\Delta\sigma = E - U. \tag{73}$$

При $\hbar \to 0$ можно искать решение в виде ряда

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\hbar}{i}\sigma_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \sigma_2 + \ldots \tag{74}$$

по степеням $\hbar$.

Рассмотрим одномерный случай. Тогда (73) эквивалентно

$$\frac{1}{2m}(\sigma')^2 - \frac{i\hbar}{2m}\sigma'' = E - U(x). \tag{75}$$

Подставив (74) в (75), получаем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2m}(\sigma_0')^2 = E - U, \\ \sigma_0'\sigma_1' - \dfrac{1}{2}\sigma_0'' = 0, \\ 2\sigma_0'\sigma_2' + (\sigma_1')^2 + \sigma_1'' = 0, \quad \text{и т. д.} \end{cases} \tag{76}$$

Из первого уравнения (76) получаем, что

$$\sigma_0 = \pm \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{2m(E - U(x))}\, dx = \pm \int\limits_{x_0}^{x} p(x)\, dx, \tag{77}$$

где $p(x) = \sqrt{2m(E - U(x))}$ — классический импульс частицы. Это верно, если

$$\frac{\hbar|\sigma_0''|}{(\sigma_0')^2} \ll 1, \quad \frac{\hbar p'}{p^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\hbar}{p}\right) = \frac{d\lambda}{dx} \ll 1. \tag{78}$$

Последнее неравенство является условием применимости квазиклассического приближения: длина волны частицы должна мало меняться на расстояниях, сравнимых с этой длиной. Перепишем (78), используя классическое равенство $p' = -\dfrac{m}{p}\dfrac{dU}{dx}$. Тогда (78) эквивалентно

$$\frac{m\hbar}{p^3}\frac{dU}{dx} \ll 1. \tag{79}$$

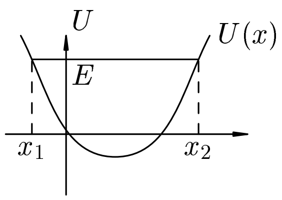


Рис. 14.

Итак, квазиклассическое приближение не применимо при очень маленьком импульсе частицы и заведомо не приемлемо вблизи *точек поворота*, т. е. точек x, в которых $E = U(x)$ (см. рис. 14).

Вдали от точек поворота из второго уравнения (76) получаем $\sigma_1' = -\dfrac{\sigma_0''}{2\sigma_0} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{p'}{p}$. Следовательно,

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2}\ln p. \tag{80}$$

Подставляя (77) и (80) в (74), получаем

$$\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}\left(\sigma_0 + \frac{\hbar}{i}\sigma_1 + \ldots\right)} = \\ = \begin{cases} \dfrac{c_1}{\sqrt{p}} \exp\left\{\dfrac{i}{\hbar}\displaystyle\int_{x_0}^{x} p\,dx\right\} + \dfrac{c_2}{\sqrt{p}} \exp\left\{-\dfrac{i}{\hbar}\displaystyle\int_{x_0}^{x} p\,dx\right\}, \\ \dfrac{c_1}{\sqrt{|p|}} \exp\left\{-\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_{x_0}^{x} |p|\,dx\right\} + \dfrac{c_2}{\sqrt{|p|}} \exp\left\{\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_{x_0}^{x} |p|\,dx\right\}, \end{cases} \tag{81}$$

где первое решение (81) задает волновую функцию $\psi(x)$ в классических областях ($U(x) < E$), а второе — в классически недоступных областях ($U(x) > E$). Заметим, что в окрестностях точек возврата потенциал $U(x)$ можно заменить на линейный, для которого существует точное решение — функция Эйри.

Пусть $U(a) = E$ и область $U(x) > E$ — это $x > a$ (см. рис. 15, *a*). Из условий на бесконечности следует, что в этой

области
$$\psi(x) = \frac{c}{2\sqrt{|p|}} \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \int\limits_a^x |p|\, dx \right\}.$$
Возникает вопрос о том, как «сшить» это решение с решением в области $x < a$, если квазиклассика не применима вблизи точки $x = a$.

Будем рассматривать решение, как функцию комплексного переменного x и обойдем точку $x = a$. Будем совершать обход вокруг точки $x = a$ против часовой стрелки в области, где для функции $E - U(x) = F_0(x - a)$ можно ограничиться первым членом тейлоровского приближения, но верна квазиклассика (см. рис. 15, *б*).

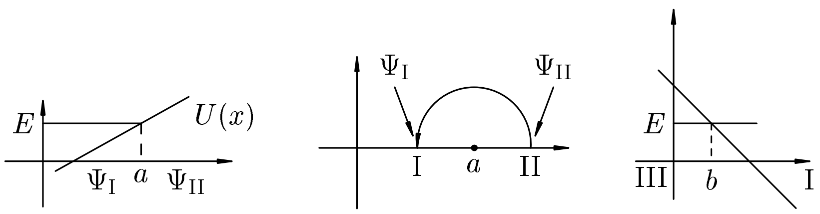
1) Первое условие выполнено, если $|x - a| \ll L$ — масштаб изменения $U(x)$ $\left(F_0 \equiv \dfrac{dU}{dx}(a)\right)$.

2) Второе условие верно, если выполнено (79):
$$\frac{m\hbar}{p^3}\frac{dU}{dx} \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{\hbar}{\sqrt{mF_0}} \ll |x - a|^{3/2}.$$

Из этих условий получаем условие совместности
$$L^{3/2} \gg \frac{\hbar}{\sqrt{m|F_0|}}. \tag{82}$$
Тогда
$$\psi_{\text{II}}(x) = \frac{c}{2(2m|F_0|)^{1/4}} \cdot \frac{1}{(x-a)^{1/4}} \times \\ \times \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \int\limits_a^x \sqrt{2m|F_0|(x-a)}\, dx \right\}. \tag{83}$$
Проследим за обходом точки a в верхней полуплоскости (φ меняется от 0 до π, см. рис. 15, *б*):
$$\int\limits_a^x \sqrt{x - a}\, dx = \frac{2}{3}(x - a)^{3/2} =$$

$$= \frac{2}{3}\rho^{3/2} e^{i\dfrac{3\varphi}{2}} = \frac{2}{3}\rho^{3/2}\left(\cos\frac{3\varphi}{2} + i\sin\frac{3\varphi}{2}\right). \quad (84)$$

Подставив (84) в (83) и сравнив с первым уравнением (81), получаем $c_1 = 0$ и $c_2 = \dfrac{1}{2}ce^{-i\pi/4}$.



а *б* *в*

Рис. 15.

Точно так же, продолжая через нижнюю полуплоскость, получаем $c_1 = \dfrac{c}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$\psi_{\mathrm{II}} = \frac{c}{2\sqrt{|p|}}\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_a^x |p|\,dx\right\},$$

$$\psi_{\mathrm{I}} = \frac{c}{\sqrt{p}}\cos\left\{\frac{1}{\hbar}\int_a^x p\,dx + \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Задача. Проверьте, что в случае сшивания решений слева направо ($U(x)$ имеет вид, показанный на рис. 15, *в*) получаются следующие решения:

$$\psi_{\mathrm{III}} = \frac{c}{2\sqrt{|p|}}\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_b^x |p|\,dx\right\},$$

$$\psi_{\mathrm{I}} = \frac{c}{\sqrt{p}}\cos\left\{\frac{1}{\hbar}\int_b^x p\,dx - \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Правило квантования Бора – Зоммерфельда

Применим полученные в предыдущем параграфе результаты для получения правил квантования Бора – Зоммерфельда (см. рис. 16, *а*):

$$\psi_{\mathrm{I}} = \frac{c}{\sqrt{p}} \cos\left\{\frac{1}{\hbar}\int\limits_a^x p\,dx + \frac{\pi}{4}\right\} = \\ = \frac{\widetilde{c}}{\sqrt{p}} \cos\left\{\frac{1}{\hbar}\int\limits_b^x p\,dx - \frac{\pi}{4}\right\} = \\ = \frac{c}{\sqrt{p}} \cos\left\{\frac{1}{\hbar}\int\limits_b^x p\,dx - \frac{1}{\hbar}\int\limits_b^a p\,dx + \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\hbar}\int\limits_b^a p\,dx = \frac{\pi}{2} + \pi n \qquad \text{и} \qquad \widetilde{c} = (-1)^n c,$$

или

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\oint\limits_{\gamma} p\,dx = n + \frac{1}{2}, \tag{85}$$

где контур γ имеет вид, показанный на рис. 16, *б*.

Уравнение (85) называется *условием квантования Бора – Зоммерфельда* и является уравнением на собственные значения E.

Условие квазиклассики обычно эквивалентно условию $n \gg 1$, но для некоторых потенциалов это условие выполняется начиная с $n = 1$.

Остановимся еще на условии нормировки.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\,dx \approx \int\limits_b^a |\psi|^2\,dx = |c|^2 \int\limits_b^a \frac{dx}{2p} = \frac{c^2}{2m}\int\limits_b^a dt = \frac{c^2}{2m}\frac{T}{2},$$

где T — период колебания классической частицы в поле с данным потенциалом и энергией E.

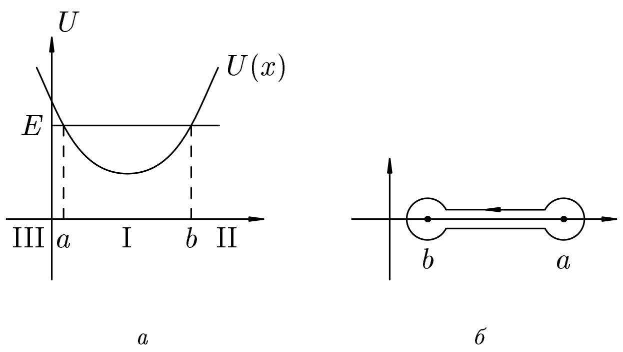


Рис. 16.

Прохождение через барьер

Пусть потенциал имеет вид, показанный на рис. 17.

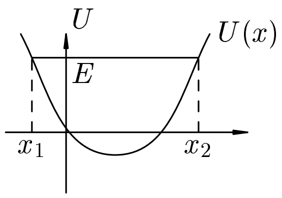


Рис. 17.

Напишем квазиклассическое решение в различных областях.

III) $x > b$.

$$\psi_{\mathrm{III}} = \frac{c}{\sqrt{p}} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_b^x p\, dx + \frac{i\pi}{4} \right\}.$$

Там, где $U(x) \to 0$, $\psi_{\mathrm{III}} \to e^{i\frac{px}{\hbar}}$. $E - U(x) = F_0 \cdot (x - b)$, $F_0 > 0$.

II) $a < x < b$. Продолжаем ψ_{III} в область II:

$$\psi_{\mathrm{III}} = \frac{c}{\sqrt{2mF_0}} \frac{1}{(x-b)^{1/4}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2mF_0}\int\limits_b^x \sqrt{x-b}\,dx + \frac{i\pi}{4}\right\} =$$

$$= \frac{c}{\sqrt{2mF_0}} \frac{1}{(b-x)^{1/4}} \exp\left\{\frac{1}{\hbar}\int\limits_b^x |p|\,dx\right\}.$$

Мы воспользовались тем, что $\int\limits_b^x \sqrt{x-b}\,dx = \frac{2}{3}\rho^{3/2}\Big(-\sin\frac{3\varphi}{2} + $ $+ i\cos\frac{3\varphi}{2}\Big)$ и сократили $e^{i\frac{\pi}{4}}$ в числителе и в знаменателе. Получаем

$$\psi_{\mathrm{II}} = \frac{c}{\sqrt{|p|}} \exp\left\{\int\limits_b^x |p|\,dx\right\}.$$

I) $x < a$. Продолжим решение ψ_{II} в эту область.

Задача. Проверьте, что получится ответ

$$\psi_{\mathrm{I}} = \frac{ce^{\frac{1}{\hbar}\int\limits_b^a |p|\,dx}}{\sqrt{p}} \left\{\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_a^x p\,dx\right\} + \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int\limits_a^x p\,dx\right\}\right\}. \qquad (86)$$

Первый член в формуле (86) представляет для больших по модулю отрицательных x

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_a^x p\,dx\right\} \underset{x\to-\infty}{\sim} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$$

отраженную от барьера волну, а второй

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int\limits_a^x p\,dx\right\} \underset{x\to-\infty}{\sim} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

падающую на барьер волну.

Тогда решение ψ_{III} — это прошедшая сквозь барьер волна (туннельный эффект).

Пусть падающая волна имеет вид $e^{\frac{ipx}{\hbar}}$, отраженная $Ae^{-\frac{ipx}{\hbar}}$, а прошедшая $Be^{\frac{ipx}{\hbar}}$. *Коэффициентом отражения* называется величина $\dfrac{|A|^2}{|A|^2+|B|^2}$, а *коэффициентом прохождения* — величина $D = \dfrac{|B|^2}{|A|^2+|B|^2}$.

Задача. Вычислите D в случае, разобранном в этом параграфе.

Задача. Рассмотрим потенциал $V(x) = \alpha x^4 - \beta x^2$, $\alpha, \beta > 0$, или общий потенциал похожего вида. Если бы барьер при $x = 0$ был бы непроницаем для частицы, то уровни энергии были бы двукратно вырождены. Возможность прохода через барьер приводит к расщеплению каждого уровня на два близких, соответствующих состояниям, в которых частица движется одновременно в обеих ямах. Определите величину расщепления в квазиклассическом случае (ЛЛ3, § 50, задача № 3).

(ЛЛ3, Гл. 7, § 46 – 50, с. 198.)

[Лекция 22]

Уравнение Дирака. Релятивистская теория электрона

Уравнение $i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = \dfrac{\hbar^2}{2m}\sum\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}$ инвариантно относительно преобразований Галилея, но релятивистски неинвариантно. Это видно хотя бы из того, что t и x_i входят не симметрично.

Пусть $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ — 4-вектор.

$$\psi = \psi(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad \text{и} \quad \widehat{p}_0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \widehat{p}_k = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \widehat{p}_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

— тоже 4-векторы.

Классический релятивистски инвариантный гамильтониан свободной частицы имеет вид $H = \text{const}\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$, поэтому квантование дает уравнение

$$[\widehat{p}_0 - (m^2c^2 + \widehat{p}_1{}^2 + \widehat{p}_2{}^2 + \widehat{p}_3{}^2)^{1/2}]\psi = 0. \tag{87}$$

Домножив на сопряженное значение, получим уравнение более симметричное относительно p_0 и p_k

$$[\widehat{p}_0^2 - m^2c^2 - \widehat{p}_1^2 - \widehat{p}_2^2 - \widehat{p}_3^2]\psi = 0. \tag{88}$$

Это уравнение называют *уравнением Клейна – Гордона*. К сожалению, уравнение (88) не совсем то, что нам нужно. Хотя оно лоренц-инвариантно (${\widehat{p}_0}^2 - \sum {\widehat{p}_k}^2$ — это квадрат 4-вектора), оно имеет больше решений, чем уравнение (87), и не является линейным по p_0.

Попробуем найти уравнение, которое было бы

1) лоренц-инвариантно,

2) линейно по p_k, в частности, имело бы первый порядок по времени,

3) и плоские волны $\psi = e^{\frac{iEt}{\hbar}} e^{i\frac{\vec{p}\vec{x}}{\hbar}}$, являющиеся решениями уравнения (88), являлись бы его решениями.

Будем искать это уравнение в виде

$$[\widehat{p}_0 - \alpha_1\widehat{p}_1 - \alpha_2\widehat{p}_2 - \alpha_3\widehat{p}_3 - \beta]\psi = 0. \tag{89}$$

Из-за однородности пространства-времени α_i и β не должны зависеть от x^μ. Умножив (89) на сопряженное значение, получим

$$[p_0^2 - \alpha_i\alpha_j p_i p_j - (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)p_i - \beta^2]\psi = 0.$$

В этом месте можно начать считать, что α_i и β — не числа, а нечто другое. Дирак называл их «гиперчислами». В любом случае, это некоторая алгебраическая структура.

Из свойств уравнения получаем соотношения на α_i и β

$$\begin{cases} \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} \\ \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \\ \beta^2 = m^2c^2 \end{cases}$$

Находим, что $\beta = mc\alpha_0$ и все α_k, $k = 0, 1, 2, 3$ образуют алгебру Клиффорда

$$\mathcal{K} = \{\alpha_\mu \mid \alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\}.$$

Уравнение (89) можно переписать в виде

$$[\widehat{p}_0 - \vec{\alpha}\hat{\vec{p}} - \alpha_0 mc]\psi = 0. \tag{90}$$

Утверждение. Наименьшее представление алгебры $\mathcal{K}$ — четырехмерное. Следовательно, ψ — четырехкомпонентная функция. В физической литературе ψ называют *спинорами*.

Одна из реализаций этого представления:

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Четырехкомпонентность релятивистской квантовой частицы связана с тем, что не существует 2-мерных представлений группы Лоренца. Правда, существуют 2-мерные представления группы собственных преобразований группы Лоренца.

Включение электромагнитного поля

Следуя классическому правилу, гамильтониан частицы в электромагнитном поле можно получить, сделав замену

$$\begin{cases} p_0 \to p_0 + \dfrac{e}{c}A_0 \\ \vec{p} \to \vec{p} + \dfrac{e}{c}\vec{A}. \end{cases}$$

Получаем уравнение в поле

$$\left[\widehat{p}_0 + \frac{e}{c}A_0 - \vec{\alpha}\left(\hat{\vec{p}} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) - \alpha_0 mc\right]\psi = 0. \tag{91}$$

Из вида замены сразу получается лоренц-инвариантность уравнения (91).

Задача. Проверьте, что (91) инвариантно относительно калибровочных преобразований $A_\mu \to A_\mu + \dfrac{\partial f}{\partial x^\mu}$, $\psi \to e^{i\frac{e}{\hbar c}f}\psi$.

Инвариантность уравнения Дирака относительно преобразований Лоренца

Начиная с этого параграфа, перестанем писать символ «$\widehat{\ }$» над операторами. Перепишем уравнение (91). Для этого умножим (91) слева на α_0 и, введя новые переменные

$$\Delta_\mu = p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu, \quad \gamma^0 = \alpha_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$
$$\gamma_i = -\alpha_0\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

получим уравнение

$$(\gamma^\mu \Delta_\mu - mc)\psi(x) = 0. \tag{92}$$

Переменные γ^μ удовлетворяют условиям $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$, где $\{a, b\} = ab + ba$, а

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

— стандартная Лоренцева метрика.

Чтобы понять, как ведет себя решение уравнения (92) при преобразованиях Лоренца, воспользуемся лоренц-инвариантностью (92), сделав бесконечно малое преобразование Лоренца $\widetilde{x}^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$, где $a^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$ и $\omega^\lambda_\mu g^\nu_\lambda + g^\mu_\lambda \omega^\lambda_\nu = 0$. Тогда

$$\begin{cases} x^\mu \to \widetilde{x}^\mu = x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu, \\ p_\mu \to \widetilde{p}_\mu = p_\mu + \omega^\nu_\mu p_\nu, \\ \psi(x) \to \widetilde{\psi}(x), \\ \Delta_\mu \to \widetilde{\Delta}_\mu = a^\lambda_\mu \Delta_\nu. \end{cases}$$

Симметрия уравнения (92) означает, что $\widetilde{\psi}(x) = S(a)\psi(\widetilde{x})$ является решением уравнения (92), где $S(a)$ — неизвестная матрица, ($\widetilde{\psi}_i(x)$ являются линейными комбинациями $\psi_i(\widetilde{x})$), т.е.

выполняется равенство

$$[\gamma^\mu \Delta_\mu - mc] S(a) \psi(\widetilde{x}) = 0.$$

Домножив слева на $S(a)^{-1}$ и вспомнив, что $\widetilde{p}_\mu = a^\nu_\mu p_\nu$, $p_\mu = \overline{a}^\nu_\mu \widetilde{p}_\nu$, где $\overline{a}^\nu_\mu a^\lambda_\nu = \delta^\lambda_\mu$, приведем последнее уравнение к точке $\widetilde{x}$:

$$[S^{-1} \gamma^\mu S \overline{a}^\nu_\mu \widetilde{\Delta}_\nu - mc] \psi(\widetilde{x}) = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением Дирака, если $S(a)$ удовлетворяет условию

$$S^{-1} \gamma^\mu S \overline{a}^\nu_\mu = \gamma^\nu, \quad \text{или} \quad S^{-1} \gamma^\mu S = a^\mu_\nu \gamma^\nu. \tag{93}$$

Будем искать матрицу S для бесконечно малого преобразования Лоренца в виде $S = \mathbb{1} + \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}$, где $\sigma_{\mu\nu}$ — неизвестные матрицы. Тогда из уравнения (93) получаем ($a^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$)

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

Задача. Проверьте, что $\sigma_{\mu\nu} = \dfrac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ являются решением (93) с точностью до $o(\omega)$.

Задача. Верно ли, что двулистное накрытие над связной компонентой единицы группы Лоренца это $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$?

Задача. Найдите S для отражений в группе Лоренца и для других компонент.

Магнитный момент электрона

Перепишем уравнение Дирака в виде уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad \text{где} \quad H = -eA_0 + c\vec{\alpha} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) + \alpha_0 mc^2,$$

и положим $\psi = \binom{u}{v}$. На u и v получим уравнения

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial u}{\partial t} = -eA_0 u + \left[c\vec{\sigma} \left(\vec{p} + \dfrac{e}{c} \vec{A} \right) \right] v + mc^2 u, \\ i\hbar \dfrac{\partial v}{\partial t} = -eA_0 v + \left[c\vec{\sigma} \left(\vec{p} + \dfrac{e}{c} \vec{A} \right) \right] u - mc^2 v. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде $\psi = e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}\binom{\varphi}{\chi}$, где функции φ, χ не зависят от времени.

Кроме того, перейдем к предельной ситуации $v \ll c$, т. е. будем считать, что $E_n = mc^2 + E$, $E \ll mc^2$. Это означает, что импульсы малые и поля слабо меняются. Подставляя ψ в предыдущую систему, получаем

$$\begin{cases} c(\vec{\sigma}\vec{\nabla})\chi - (E + eA_0)\varphi = 0, \\ (2mc^2 + E + eA_0)\chi = c(\vec{\sigma}\vec{\nabla})\varphi, \end{cases}$$

где $\nabla = p + \frac{e}{c}A$. Из второго уравнения получаем, что $\chi \approx \dfrac{\vec{\sigma}\vec{\nabla}}{2mc}\varphi$, так как $2mc^2 \gg E + eA_0$. Следовательно, $\chi \ll \varphi$. Подставляя χ в первое уравнения, получаем

$$\left[\frac{(\vec{\sigma}\vec{\nabla})^2}{2m} - eA_0\right]\varphi = E\varphi. \tag{94}$$

Вспоминая свойства σ_i, а именно, $\sigma^2 = \mathbb{1}$ и $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$ и т. д., получаем

$$(\vec{\sigma}\vec{B})(\vec{\sigma}\vec{C}) = (\vec{B}\vec{C}) + i(\vec{\sigma}[\vec{B},\vec{C}]),$$
$$\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) \times \left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right) = \frac{e}{c}(\vec{p} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{p}) =$$
$$= -i\hbar\frac{e}{c}\operatorname{rot}\vec{A} = -i\hbar\frac{e}{c}\vec{H},$$
$$(\vec{\sigma}\vec{\nabla})^2 = \left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + \frac{\hbar e}{c}(\vec{\sigma}\vec{H}).$$

Окончательно получаем, что уравнение (94) эквивалентно

$$H\varphi = E\varphi,$$

где

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + \frac{\hbar e}{2mc}(\vec{\sigma}\vec{H}) - eA_0.$$

Предпоследний член этого гамильтониана по аналогии с классическим гамильтонианом интерпретируется как взаимодействие собственного магнитного момента $\vec{\mu} = -\frac{\hbar e}{2mc}\vec{\sigma}$ с магнитным полем $\vec{H}$.

Найдем выражение для момента количества движения электрона. Будем искать момент в виде $\frac{1}{\hbar}\vec{M} = \vec{L} + \vec{S} = [\vec{r}, \vec{p}] + \vec{S}$, где $\vec{S} = (s_1, s_2, s_3)$ — постоянные матрицы, и определим $\vec{M}$ из инвариантности $\vec{M}$ для свободного электрона. На языке квантовой механики это означает, что $\vec{M}$ — первый интеграл, т. е. коммутирует с гамильтонианом свободного электрона $H = c\vec{\alpha}\vec{p} + \alpha_0 mc^2$. Итак, выполняются уравнения $[\vec{M}, H] = 0$ или

$$[\vec{L}, c\vec{\alpha}\vec{p}] + [\vec{S}, c\vec{\alpha}\vec{p}] = 0. \tag{95}$$

Перепишем (95) в терминах операторов l_i и s_i:

$$[l_i, c\alpha_k p_k] + [s_i, c\alpha_k p_k] = 0.$$
$$c\alpha_k [l_i, p_k] + c[s_i, \alpha_k] p_k = 0$$

(для операторов l_i величины α_k постоянны, а s_i и p_k коммутируют). Последнее уравнение можно переписать, пользуясь перестановочными соотношениями между l_i и p_k, так

$$i\varepsilon_{ikl}\alpha_k p_l + \begin{bmatrix} 0 & [s_i, \sigma_k] \\ [s_i, \sigma_k] & 0 \end{bmatrix} p_k = 0. \tag{96}$$

Будем считать (мы опять угадываем ответ), что $s_i = \lambda\sigma_i$. Из (96) получаем

$$i\varepsilon_{ikl}\alpha_k p_l + i\varepsilon_{ikl} \begin{bmatrix} 0 & 2\lambda\sigma_l \\ 2\lambda\sigma_l & 0 \end{bmatrix} p_k = 0,$$

или

$$i\varepsilon_{ikl}(\alpha_k p_l + 2\lambda\alpha_l p_k) = 0.$$

Последнее равенство выполняется, если $2\lambda = 1$. Окончательно получаем, что $s_i = \sigma_i/2$. Если обозначить $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, то $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ и $\frac{1}{\hbar}\vec{M} = \vec{L} + \frac{\vec{\sigma}}{2}$. Исходя из этого, собственный магнитный момент электрона правильно записывать как

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{mc}\left(\frac{\hbar\vec{\sigma}}{2}\right) = -\frac{e\hbar}{mc}\vec{S}.$$

Вспомнив, что орбитальный момент равен

$$\vec{\mu}_{\text{орбитальное}} = \frac{\hbar e}{2mc}\vec{L} = \mu_B \vec{L},$$

где константа $\mu_B = \dfrac{\hbar e}{2mc}$ называется *магнетоном Бора*, получаем

$$\vec{\mu} = 2\mu_B \vec{S}.$$

(Д, § 66, 67.)

Семинары по курсу «Теоретическая физика»

[6 семестр]

А. А. Кадейшвили, А. Г. Кулаков

Семинар 1

Темы:

1) Основы квантовой механики.
2) «Шредингеровская картина» (представление) квантовой механики.
3) Состояния.
4) Наблюдаемые.
5) Вероятность наблюдаемой в данном состоянии.
6) Собственные состояния данной наблюдаемой
7) Гамильтониан.
8) Уравнение Шредингера.
9) Координатное и импульсное представления.

Задача 1. Планк в своей работе исходил из следующих предположений.

1) Атомы черного тела, находящегося при температуре T, могут находиться в нормальном состоянии или в возбужденном. В нормальном состоянии вне черного тела n фотонов с частотой ω, в возбужденном — $n+1$. (n и $n+1$ — это среднее число.) $N_{\text{осн}}$, $N_{\text{возб}}$ — количественные характеристики состояний (может быть число атомов, а может быть масса).

2) Из термодинамики $\dfrac{N_{\text{возб}}}{N_{\text{осн}}} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$.

3) $|a|^2$ — вероятность, что один фотон провзаимодействует с веществом, поглотится или испустится, не зависит от состояния. Скорость (средняя, естественно) равна

$$N_{\text{состояния}} \times (\text{число фотонов}) \times |a|^2.$$

Имеется в виду «каждый взаимодействует с каждым».

4) Конечно же, скорость поглощения = скорости испускания.

5) Планк: $\Delta E = E_{\text{фотона}} = \hbar\omega$.

Найдите энергию фотонов в данном состоянии.

Решение. Скорость испускания $= N_{\text{осн}} n|a|^2$, скорость поглощения $= N_{\text{возб}}(n+1)|a|^2$. Получаем

$$N_{\text{осн}} n|a|^2 = N_{\text{возб}}(n+1)|a|^2, \Rightarrow n_{\text{осн}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}, \quad E_{\text{общая}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Задача 2. Рассмотрим мысленный эксперимент, описанный в первой лекции. Будем считать, что $\psi_i = c\dfrac{e^{il_i k}}{l_i}$, $P_i = |\psi_i|^2$, где l_i — расстояние, которое пролетает электрон до экрана через i-ю щель, $P_i(x)$ — интенсивность на экране с i-й открытой щелью. Считая $a \ll l$, $x \ll l$, найдите

1) $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_{12}(x)$, $P_{12}(0)$;

2) Расстояние d между главным максимумом и ближайшим минимумом, в частности, как по d определить λ, или, зная λ и d определить a;

3) Что произойдет, если источник сдвинуть перпендикулярно оси опыта на D (L — расстояние от источника до плоскости щелей, $D \ll L$)?

4) Что произойдет, если a увеличить в 2 раза, в n раз?

5) Что произойдет, если первую щель сделать в 2 раза шире?

Задача 3. Определите энергетические уровни электрона в атоме водорода в теории Бора:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{e^2}{r}, \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}, \quad mv2\pi r = nh, \quad mvr = n\hbar.$$

Задача 4. Потенциал гамильтониана ограничен снизу. Пусть $\min V(x) = V_{\min}$. Докажите, что дискретный спектр гамильтониана удовлетворяет неравенству $E_{\text{дискр}} \geqslant V_{\min}$.

Решение: $E_{\text{дискр}} = \langle\psi|H|\psi\rangle = \langle T\rangle_\psi + \langle V\rangle_\psi \geqslant V_{\min}$.

Семинар 2

Тема: «Гейзенберговская картина» квантовой механики.

Задача 1. Докажите, что

$$e^{\widehat{A}}\widehat{B}e^{-\widehat{A}} = \widehat{B} + \frac{1}{1!}[\widehat{A}, \widehat{B}] + \frac{1}{2!}[\widehat{A}, [\widehat{A}, \widehat{B}]] + \ldots$$

Задача 2. Найдите $\widehat{p}(t)$, $\widehat{x}(t)$ для

а) свободной частицы;

б) линейного гармонического осциллятора.

Ответ: а) $\widehat{p}(t) = \widehat{p}$, $\widehat{x}(t) = \widehat{x} + \dfrac{\widehat{p}t}{m}$. б)

$$\begin{cases} \widehat{x}(t) = \widehat{x}\cos(\omega t) - \dfrac{\widehat{p}}{m\omega}\sin(\omega t) \\ \widehat{p}(t) = m\omega\widehat{x}\sin(\omega t) + \widehat{p}\cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{A} = \left(\sqrt{m\omega}\widehat{x} + \dfrac{i}{\sqrt{m\omega}}\widehat{p}\right) \\ \widehat{A}^* = \left(\sqrt{m\omega}\widehat{x} - \dfrac{i}{\sqrt{m\omega}}\widehat{p}\right) \end{cases}$$

$$[\widehat{A}, \widehat{A}^*] = 2\hbar, \quad \widehat{H} = \frac{\omega}{2}(\widehat{A}^*\widehat{A} + \hbar), \quad \widehat{A}(t) = \widehat{A}e^{i\omega t}, \quad \widehat{A}^*(t) = \widehat{A}^*e^{-i\omega t}.$$

Задача 3. Для систем а) и б) из предыдущей задачи найдите $[\widehat{x}(t), \widehat{p}(t')]$.

Ответ:

а) $[\widehat{x}(t), \widehat{p}(t')] = i\hbar$.

б) $[\widehat{x}(t), \widehat{p}(t')] = i\hbar\cos(\omega(t - t'))$.

Задача 4. Пусть $\widehat{H} = \dfrac{\widehat{p}^2}{2m} + U(\widehat{x})$. Найдите уравнения на а) $\langle\widehat{p}(t)\rangle$ и б) $\langle\widehat{x}(t)\rangle$.

Ответ:

а) $\dfrac{d}{dt}\langle\widehat{p}(t)\rangle = \left\langle\dfrac{d\widehat{p}(t)}{dt}\right\rangle = \dfrac{i}{\hbar}\langle[\widehat{H}, \widehat{p}(t)]\rangle = -\langle\nabla\widehat{U}(x)\rangle = -\langle\widehat{F}(x)\rangle$.

б) $\dfrac{d}{dt}\langle\widehat{x}(t)\rangle = \left\langle\dfrac{d\widehat{x}(t)}{dt}\right\rangle = \dfrac{i}{\hbar}\langle[\widehat{H}, \widehat{x}(t)]\rangle = \dfrac{1}{m}\langle\widehat{p}(t)\rangle$.

Задача 5. На линейный осциллятор, находящийся при $t \to -\infty$ в основном состоянии, действует внешняя сила $F(t)$, $F(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Найдите вероятность возбуждения различных состояний осциллятора, средний номер возбужденного состояния и среднее значение энергии осциллятора при $t \to +\infty$.

Решение:

$$\widehat{H}(t) = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\widehat{x}^2}{2} - F(t)\widehat{x} =$$
$$= \frac{\omega}{2}(\widehat{A}^*\widehat{A} + \hbar) - F(t)\frac{1}{2\sqrt{m\omega}}(\widehat{A}^* + \widehat{A}),$$
$$\frac{d\widehat{A}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\widehat{H}(t), \widehat{A}(t)] = i\omega\widehat{A}(t) + \frac{iF(t)}{\sqrt{m\omega}},$$
$$\widehat{A}(t) = e^{i\omega t}(\widehat{A} + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\int\limits_{-\infty}^{t} F(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau)$$

$t \to +\infty$, $\widehat{A}(t) \to \widehat{A}_\infty = e^{i\omega t}(\widehat{A} + \alpha)$,

$$\text{где}\quad \alpha = \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

Основное (или вакуумное) состояние осциллятора определяется условиями $\widehat{A}\psi_0 = 0$, $\|\psi_0\| = 1$. Эволюция вакуумного состояния

$$\psi(t) = \widehat{U}(t)\psi_0, \quad \widehat{A}\psi_0 = 0, \quad \widehat{A}(t)\psi(t) = \widehat{U}(t)\widehat{A}\widehat{U}^+(t)\widehat{U}(t)\psi_0 = 0,$$
$$\widehat{a}(t) \to \widehat{a}_\infty, \quad \psi(t) \to \psi_\infty \ \text{ при }\ t \to +\infty.$$

Окончательно получаем, что ψ_∞ удовлетворяет уравнению

$$(\widehat{A} + \alpha)\psi_\infty = 0. \tag{A}$$

Заметим, что $\widehat{A}$, $\widehat{A}^*$ пропорциональны $\widehat{a}$, $\widehat{a}^*$: $\widehat{a} = \dfrac{\widehat{A}}{\sqrt{2\hbar}}$, $\widehat{a}^* = \dfrac{\widehat{A}^*}{\sqrt{2\hbar}}$. Поделив (A) на $\sqrt{2\hbar}$, мы получим следующее уравнение

$$(\widehat{a} + \beta)\psi_\infty = 0, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2\hbar}}. \tag{B}$$

Как известно, остальные состояния линейного гармонического осциллятора получаются из вакуумного $\psi_n = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}(\widehat{a}^*)^n\psi_0$, $\|\psi_n\| = 1$. Пусть $\psi_\infty = \sum c_n\psi_n = \sum \dfrac{1}{\sqrt{n!}}(\widehat{A}^*)^n\psi_0$. Кроме того, есть еще условие нормировки $\|\psi_\infty\|^2 = \sum |c_n|^2 = 1$. Из (B) получаем рекуррентное уравнение на коэффициенты c_n, а из нормировки окончательно получаем сами коэффициенты

$$c_{n+1} = -\frac{\beta}{\sqrt{n+1}}c_n, \quad \text{или} \quad c_n = (-1)^n \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}c_0, \quad |c_0|^2 = e^{-|\beta|^2},$$

$$c_n = (-1)^n \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}.$$

Итак, мы получили Пуассоново распределение по состояниям осциллятора. Вероятности перехода, среднее значение энергии и среднее значение номера состояния равны

$$w_{0\to n} = |\langle\psi_n|\psi_\infty\rangle|^2 = \frac{|\beta|^{2n}}{n!}\exp(-|\beta|^2), \quad \overline{n}_{\text{ср}} = \sum n|c_n|^2 = |\beta|^2,$$

$$E(+\infty) = \langle\psi_\infty|\widehat{H}_{+\infty}|\psi_\infty\rangle = \sum |c_n|^2 E_n =$$

$$= \sum \frac{\beta^{2n}}{n!} e^{-|\beta|^2} \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + |\beta|^2\right).$$

Задача 6. Для линейного осциллятора найдите матричные элементы, исходя из коммутационных соотношений.

Решение:

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\widehat{x}^2, \quad E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad H \text{ диагональна!}$$

$$\begin{cases} [H,x] = \dfrac{1}{2m}[p^2,x] = -\dfrac{i\hbar}{m}p, \\ [H,p] = \dfrac{m\omega^2}{2}[x^2,p] = i\hbar m\omega^2 x, \end{cases} \qquad \begin{cases} [H,x]_{jk} = -\dfrac{i\hbar}{m}p_{jk}, \\ [H,p]_{jk} = i\hbar m\omega^2 x_{jk}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_j x_{jk} - E_k x_{jk} = -\dfrac{i\hbar}{m}p_{jk}, \\ E_j p_{jk} - E_k p_{jk} = i\hbar m\omega^2 x_{jk}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hbar\omega(j-k)x_{jk} = -\dfrac{i\hbar}{m}p_{jk}, \\ \hbar\omega(j-k)p_{jk} = i\hbar m\omega^2 x_{jk}, \end{cases} \qquad (j-k)^2 = 1,$$

$$E_n = H_{nn} = \frac{1}{2m}(p^2)_{nn} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2)_{nn} =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\sum_j p_{nj}p_{jn}\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(\sum_j x_{nj}x_{jn}\right) =$$

$$= \frac{1}{2m}(|p_{n,n+1}|^2 + |p_{n-1,n}|^2) + \frac{m\omega^2}{2}(|x_{n,n+1}|^2 + |x_{n-1,n}|^2) =$$
$$= m\omega^2(|x_{n,n+1}|^2 + |x_{n-1,n}|^2) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),$$
$$\begin{cases} n = 0,\ |x_{0,1}|^2 = \dfrac{\hbar}{2m\omega}, \\ \ldots \\ n = n,\ |x_{n,n+1}|^2 = \dfrac{\hbar}{2m\omega}(n+1). \end{cases}$$

Семинар 3

Темы:

1) Описание в декартовых координатах $\to \{p, x\}$.

2) Описание в сферических координатах $\to \{l, \varphi\}$.

Задача 1. Как выглядит равенство $\hbar\widehat{\vec{l}} = [\widehat{\vec{r}}, \widehat{\vec{p}}]$ по-координатно?

Ответ: $\widehat{\vec{l}} = (\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z,),$

$$\hbar\hat{l}_x = \widehat{y}\,\widehat{p}_z - \widehat{z}\,\widehat{p}_y, \quad \hbar\hat{l}_y = \widehat{z}\,\widehat{p}_x - \widehat{x}\,\widehat{p}_z, \quad \hbar\hat{l}_z = \widehat{x}\,\widehat{p}_y - \widehat{y}\,\widehat{p}_x.$$

Задача 2. Выведите коммутационные соотношения между наблюдаемыми $\hat{l}_i$, $\widehat{x}_i$, $\widehat{p}_i$.

Ответ:

$$[\hat{l}_i, \hat{l}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{l}_k, \quad [\hat{l}_i, \hat{x}_j] = i\varepsilon_{ijk}\widehat{x}_k, \quad [\hat{l}_i, \hat{p}_j] = i\varepsilon_{ijk}\widehat{p}_k.$$

Задача 3. Выведите коммутационные соотношения между наблюдаемыми $\hat{l}_i$, и $\hat{l}_\pm := \hat{l}_x + i\hat{l}_y$; $\hat{l}_i$, и $\hat{l}^2 := \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2$.

Ответ:

$$[\hat{l}_z, \hat{l}_\pm] = \pm\hat{l}_\pm, \quad [\hat{l}_+, \hat{l}_-] = 2\hat{l}_z, \quad [\hat{l}^2, \hat{l}_i] = 0.$$

Следовательно, $(\hat{l}^2, \hat{l}_z)$ — полный набор наблюдаемых.

Задача 4. Как выглядят $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$ в координатном представлении в сферических координатах.

Ответ:

$$\hat{l}_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \hat{l}^2 = -\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right].$$

Задача 5. Найдите собственные функции оператора $\hat{l}_z$.

Ответ:

$$\hat{l}_z\psi = l_z\psi, \quad \psi = f(r,\theta)e^{l_z\varphi}, \quad l_z = 0, \pm1, \pm2\ldots$$

и обозначается, обычно, m.

Задача 6. Вычислите собственные значения оператора $\hat{l}^2$.

Указание. Их можно получить только из коммутационных соотношений.

Решение. Рассмотрим пространство собственных векторов оператора $\hat{l}^2$ с собственным значением S, т. е. $V_S = \{\psi|\hat{l}^2\psi = S\psi\}$. Это конечномерное пространство. Докажите следующие утверждения:

1) пространство V_S раскладывается по собственным векторам оператора $\hat{l}_z$;

2) если $\hat{l}_z\psi = m\psi$, то $\hat{l}_z\ (\hat{l}_\pm\psi) = (m\pm1)\psi$;

3) существует вектор ψ_m такой, что $\hat{l}_-\psi_m = 0$, $\hat{l}_z\psi_m = -m\psi_m$;

4) применим соотношение $\hat{l}^2 = \hat{l}_+\hat{l}_- + \hat{l}_z^2 - \hat{l}_z$ к ψ_m и получим $S = m(m+1)$.

Задача 7 Выведите правило сложения моментов.

Задача 8. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, порожденную матрицами

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выведите коммутационные соотношения между H, L_+, L_-. Изоморфна ли эта алгебра алгебре, порожденной $\hat{l}_x$, $\hat{l}_y$, $\hat{l}_z$?

Задача 9. Выпишите уравнение Шредингера для сферически симметричного гамильтониана в пространстве V_S. Разделите переменные и сделать стандартную замену $R(r) = \dfrac{\chi}{r}$.

Семинар 4

Темы:

1) Стационарная теория возмущений. Невырожденный случай.

2) Стационарная теория возмущений. Вырожденный случай.

Выпишите все формулы стационарной теории возмущений в невырожденном случае.

Задача 1. Найдите сдвиг в слабом электрическом поле и поляризуемость основного уровня заряженной частицы в однородном δ-потенциале $U(x) = -\alpha\delta(x)$.

Задача 2. Выпишите все формулы стационарной теории возмущений в вырожденном случае.

Задача 3. В начальный момент времени $t = 0$ система находится в состоянии $\psi_1^{(0)}$ двукратно вырожденного уровня. Определите вероятность перехода в состояние $\psi_2^{(0)}$ под действием постоянного возмущения.

Задача 4. Найдите поправки к энергии линейного осциллятора и волновые функции при возмущении $V(x) = e\varphi = -eFx$. Найдите условие применимости теории в данном случае.

Задача 5. Определите уровни энергии ангармонического осциллятора с гамильтонианом

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 + \beta x^4.$$

(ЛЛ3, Гл. 6, § 38, задача 3, с. 166.)

Семинар 5

Тема: нестационарная теория возмущений.

Задача 1. Выпишите все формулы нестационарной теории возмущений.

Задача 2. Найдите вероятность перехода осциллятора из i-го состояния при $t = -\infty$ в j-е при $t = +\infty$ при возмущении равном $V(t) = \left(Fe^{-i\omega t} + F^* e^{i\omega t}\right)$.

Задача 3. Найдите скорость «ионизации» (вероятность изменения состояния в единицу времени) для основного состояния частицы в δ-яме под действием возмущения $V(x,t) = -xF_0\cos(\omega t)$.

Задача 4. Частица находится в основном состоянии в δ-яме ($U(x) = -\alpha\delta(x)$). При $t = 0$ яма приходит в движение с постоянной скоростью. Найдите вероятность того что яма «увлечет» частицу за собой.

Задача 5. На линейный осциллятор, находящийся при $t \to -\infty$ в основном состоянии, действует внешняя сила $F(t)$, $F(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Найдите вероятность возбуждения различных состояний осциллятора, средний номер возбужденного состояния и среднее значение энергии осциллятора при $t \to +\infty$.

Решение:

$$\widehat{H}(t) = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\widehat{x}^2}{2} - F(t)\widehat{x} = \\ = \frac{\omega}{2}(\widehat{A}^*\widehat{A} + \hbar) - F(t)\frac{1}{2\sqrt{m\omega}}(\widehat{A}^* + \widehat{A}),$$

$$\frac{d\widehat{A}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\widehat{H}(t), \widehat{A}(t)] = i\omega\widehat{A}(t) + \frac{iF(t)}{\sqrt{m\omega}},$$

$$\widehat{A}(t) = e^{i\omega t}(\widehat{A} + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\int\limits_{-\infty}^{t} F(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau)$$

$$t \to +\infty,\ \widehat{A}(t) \to \widehat{A}_\infty = e^{i\omega t}(\widehat{A} + \alpha),$$

$$\text{где}\ \ \alpha = \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

Основное (или вакуумное) состояние осциллятора определяется условиями $\widehat{A}\psi_0 = 0$, $\|\psi_0\| = 1$. Эволюция вакуумного состояния

$$\psi(t) = \widehat{U}(t)\psi_0, \quad \widehat{A}\psi_0 = 0, \quad \widehat{A}(t)\psi(t) = \widehat{U}(t)\widehat{A}\widehat{U}^+(t)\widehat{U}(t)\psi_0 = 0,$$
$$\widehat{a}(t) \to \widehat{a}_\infty, \quad \psi(t) \to \psi_\infty \ \text{ при }\ t \to +\infty.$$

Окончательно получаем, что ψ_∞ удовлетворяет уравнению

$$(\widehat{A} + \alpha)\psi_\infty = 0. \tag{A}$$

Заметим, что $\widehat{A}$, $\widehat{A}^*$ пропорциональны $\widehat{a}$, $\widehat{a}^*$: $\widehat{a} = \dfrac{\widehat{A}}{\sqrt{2\hbar}}$, $\widehat{a}^* = \dfrac{\widehat{A}^*}{\sqrt{2\hbar}}$. Поделив (A) на $\sqrt{2\hbar}$, мы получим следующее уравнение

$$(\widehat{a} + \beta)\psi_\infty = 0, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2\hbar}}. \tag{B}$$

Как известно, остальные состояния линейного гармонического осциллятора получаются из вакуумного $\psi_n = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}(\widehat{a}^*)^n\psi_0$, $\|\psi_n\| = 1$. Пусть $\psi_\infty = \sum c_n\psi_n = \sum \dfrac{1}{\sqrt{n!}}(\widehat{A}^*)^n\psi_0$. Кроме того, есть еще условие нормировки $\|\psi_\infty\|^2 = \sum |c_n|^2 = 1$. Из (B) получаем рекуррентное уравнение на коэффициенты c_n, а из нормировки окончательно получаем сами коэффициенты

$$c_{n+1} = -\frac{\beta}{\sqrt{n+1}}c_n, \quad \text{или} \quad c_n = (-1)^n\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}c_0, \quad |c_0|^2 = e^{-|\beta|^2},$$
$$c_n = (-1)^n\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}.$$

Итак, мы получили Пуассоново распределение по состояниям осциллятора. Вероятности перехода, среднее значение энергии и среднее значение номера состояния равны

$$w_{0\to n} = |\langle\psi_n|\psi_\infty\rangle|^2 = \frac{|\beta|^{2n}}{n!}\exp(-|\beta|^2), \quad \overline{n}_{\text{ср}} = \sum n|c_n|^2 = |\beta|^2,$$
$$E(+\infty) = \langle\psi_\infty|\widehat{H}_{+\infty}|\psi_\infty\rangle = \sum |c_n|^2 E_n =$$
$$= \sum \frac{\beta^{2n}}{n!}e^{-|\beta|^2}\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + |\beta|^2\right).$$

Семинар 6

Тема: Разные задачи.

Задача 1. Определите коэффициент прохождения через потенциальный барьер $U(x)$, где

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0 - Fx, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Вычислите экспоненциальный множитель. (ЛЛ3, Гл. 7, § 50, задача 1.)

Задача 2. Решите одномерное уравнение Шредингера для потенциала

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ V_1, & x_3 \leqslant x (x_2 < x_3) \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Разобрать все возможности.

Задача 3. Найдите спектр одномерной частицы в потенциале

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } 0 \leqslant x, \\ 0, & \text{если } 0 < x \leqslant x_0, \\ V_0, & \text{если } x_0 < x. \end{cases}$$

Задача 4. Найдите средние значения импульса $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ и координаты $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ частицы, находящейся в состоянии $\psi = \sin^2(kx)$.

Задача 5. $\psi(x) = A\sin(kx)$. Каково среднее значение импульса $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ в этом состоянии?

Задача 6. Возмущение потенциала осциллятора равно $\delta V(x) = \alpha x$. Найдите поправки энергии осциллятора, возникающие за счет этого возмущения. Сравните с точным решением.

Возможные задачи для письменного экзамена

Задача 1. Вычисляя континуальный интеграл, найдите амплитуду распространения свободной частицы $K(x,t,y,0)$.

Задача 2. Решите уравнение Шредингера с начальным условием $\psi_0(x) = \delta(x - x_0)$.

Задача 3. Найдите волновую функцию, минимизирующую соотношение неопределенности.

Задача 4. Решите уравнение Шредингера для случая конечной прямоугольной ямы.

Задача 5. Вычислите $\langle p_x^2 \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ в основном состоянии атома водорода H.

Задача 6. Вычислите $\langle p^2 \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ для осциллятора в основном состоянии.

Задача 7. Из теории возмущений найдите $\delta F_n^{(1)}$ для осциллятора в потенциале $V = \lambda x^4$.

Задача 8. Определите снятие вырождения в атоме водорода для $n = 2$ в однородном электрическом поле.

Задача 9. Найдите поправку $\psi_n^{(2)}$ и $F_n^{(2)}$ в стационарном случае.

Задача 10. Найдите F_n для осциллятора по квазиклассике. Сравнить с точным решением.

Задача 11. В координатном и импульсном представлении найдите операторы $x(t)$, $p(t)$ для линейного гармонического осциллятора в картине Гейзенберга, и выразите дисперсии координаты и импульса через их начальные значения.

Задача 12. Найдите S-уровни энергии в сферически-симметричной яме:

$$V(r) = \begin{cases} -V, & r < a, \\ 0, & r \geqslant a. \end{cases}$$

Задача 13. В начальный момент времени плотность распределения координат свободно эволюционирующей частицы имела Гауссову форму:

$$\psi(x,0) = N \exp\left(\frac{ipx}{\hbar} - \frac{x^2}{2\delta^2}\right); \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) За какое время ширина пакета увеличится вдвое?

2) Найдите $\psi(x,t)$.

3) Вычислите среднее значения и дисперсии x и p.

Задача 14. Покажите, что в центрально-симметричном поле H, l^2, l_z образуют коммутирующий набор наблюдаемых.

Задача 15. Частица находится в состоянии с данным определенным квадратом орбитального момента и определенной энергией в кулоновом поле притяжения. Вычислите средние значения $\langle r^{-1}\rangle$, $\langle r^{-2}\rangle$, $\langle r^{-3}\rangle$.

Задача 16. Вычислите амплитуду рассеяния частицы на потенциальной яме

$$V(r) = \begin{cases} -V, & r < a, \\ 0, & r \geqslant a, \end{cases}$$

в пределе нулевой энергии.

Задача 17. Частица со спином $\frac{1}{2}$ движется в поле центральных сил. Проверьте, что наблюдаемые $j_z = l_z + s_z$, j^2, l^2 являются одновременно измеримыми и найдите их общие собственные функции.

Задача 18. Докажите, что в состоянии с определенной энергией в центрально-симметричном поле кулонового заряда выполняется равенство $2\langle T\rangle = -\langle V\rangle$.

Пример письменного экзамена по курсу «Теоретическая физика», 6-й семестр

Вариант 1

Теоретические вопросы

1. Шредингеровское и Гейзенберговское описания квантовой механики.
2. Гармонический осциллятор.

Задачи

1. Найдите спектр (энергетические уровни) и волновые функции связанных состояний при данном одномерном потенциале:

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geqslant a. \end{cases}$$

2. Найдите по теории возмущений поправки 1-го и 2-го порядков к энергии основного состояния осциллятора, возмущенного потенциалом $V(x) = \alpha x^4$.

3. Атом водорода помещен в однородное электрическое поле с напряженностью E. Найдите расщепление второго уровня.

4. На осциллятор действует в течении конечного времени возмущение $V(x) = xf(t)$, где $f(t)$ — финитная функция с носителем $[0; t_0]$. Найдите вероятность перехода из основного состояния в n-е.

Вариант 2

Теоретические вопросы

1. Состояния, физические наблюдаемые, уравнения движения в квантовой механике.

2. Гармонический осциллятор.

3. Стационарная теория возмущений.

Задачи

1. Найдите спектр (уравнение на энергетические уровни) связанных состояний при данном одномерном потенциале. Приближенно посчитайте энергию основного состояния в предположении о ее малости.

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & x < -a \text{ и } a \leqslant x, \\ U_0, & -b \leqslant x < b, \\ 0, & -a \leqslant x < -b \text{ и } b \leqslant x < a. \end{cases}$$

2. Атом водорода помещен в слабое однородное электрическое поле с напряженностью E. Найдите расщепление третьего уровня.

3. Атом водорода помещен в слабое однородное магнитное поле с напряженностью H. Найдите расщепление второго уровня.

4. На осциллятор действует в течении конечного времени возмущение $V(x) = ax^2 f(t)$, где $f(t)$ — финитная функция с носителем $[0; t_0]$. Найдите вероятность перехода из основного состояния в n-е.

Литература

[ЛЛ1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика, т. 1. М., Наука, 1973.

[ЛЛ2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, т. 2. М., Наука, 1973.

[ДНФ] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. М., Наука, 1986.

[Арн] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М., Наука, 1989.

[ФЯ] Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский. Лекции по квантовой механике. Для студентов математиков. Л., Издательство Ленинградского университета, 1980.

[М] Ю. И. Манин. Математика и Физика. Серия «Математика, кибернетика» 12. 1979.

[ФЛС] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. М., Мир, 1967, 1978 и другие издания.

[ЛЛ3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика, т. 3. М., Наука, 1974.

[Д] П. А. М. Дирак. Принципы квантовой механики. М., Наука, 1979.

[ФХ] Р. Фейнман, А. Хибс. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М., Мир, 1968.

[ФН] Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М., Наука, 1964.

[Арн2] В. И. Арнольд. Лекции по уравнениям с частными производными. М., Изд-во МК НМУ, 1995.

Оглавление